WYKŁAD

MECHANIKI CZĄSTECZKOWEJ

(Molekularnej)

CZĘŚĆ RÓŻNICZKOWA

LEKCYA I

Wstęp. — Definicya Mechaniki Cząsteczkowej. — Pojęcia o budowie materyi. — Inna zasada.

1. Wstęp. — W mechanice analitycznej (ogólnej) uważa się ciała za zupełnie *sztywne*, t. j. przypuszcza się, że położenia względne punktów, na które działają siły bezpośrednio lub pośrednio, pozostają niezmiennemi, niezależnie od ich natężeń; jedném słowem, przyjmuje się jakby te ciała utworzone były z *materyi ciągłej* i pod żadnemi wpływami kształtu swojego zmieniać nie mogły.

Pewna liczba ciał sztywnych, znajdujących się pod wpływem sił wewnętrznych (naprzykład gdy się przyciągają lub odpychają) i sił zewnętrznych, tudzież, poddanych pewnym warunkom geometrycznym (naprzykład że pewne ich punkta mają zostawać na danych powierzchniach lub krzywych liniach) stanowi tak zwany *układ mechaniczny*. Zbytecznem zapewne byłoby na tém miejscu objaśniać, dlaczego w każdym

przypadku, warunki geometryczne zastąpić można przez wprowadzenie pewnych sił, lub nawzajem, pewne siły przez wprowadzenie odpowiednich warunków geometrycznych.

Oznaczyć ruch układu mechanicznego, lub, oznaczyć warunki jakim siły i związki geometryczne mają zadosyć uczynić ażeby układ był w równowadze, oto są *dwa główne i najogólniejsze zadania mechaniki analitycznej*.

Reguły do rozwiązania zadań tych prowadzące, *przedmiot i cel mechaniki analitycznej*, polegają na wskazaniu działań które potrzeba z ilościami w zadaniu danemi wykonać, ażeby rozwiązanie otrzymać. Dochodzi się zaś do nich przez ścisłe rozumowanie, opierające się na pewnych zasadach, t. j. prawdach niezbitych, usprawiedliwionych licznemi doświadczeniami i rozumowaniem, takich mianowicie prawdach, jak *bezwładność materyi*, *niezależność ruchów* i t. d.

Tak więc, mechanika analityczna, we właściwém znaczeniu tego wyrazu, podawszy raz ogólne prawa ruchu i równowagi układu mechanicznego i na nich oparte reguły na rozwiązanie obydwóch wyżej sformułowanych zadań, nie zajmuje się już innemi trudnościami, jakie się w rozmaitych szczególnych przypadkach spotykają. Chcę tu mówić o trudnościach matematycznych, wynikających z natury ilości danych w zadaniu z jednej strony, i z niewydoskonalenia jeszcze samej matematyki ze strony drugiej. Ażeby lepiej kwestyę tę uwydatnić, weźmiemy za przykład *mechanikę nieba*.

Jeżeli ciała składające układ mechaniczny posiadają kształt *elipsoid obrotowych*, i jeżeli każde dwa nieskończenie małe elementa wzięte z dwóch którychkolwiek różnych ciał, przyciągają się wzajemnie, *w kierunku prostej łączącej ich środki ciężkości*, *i z natężeniem proporcyonalnem do iloczynu ich mass a odwrotnie proporcyonalnem do kwadratu z ich odległości*; oznaczenie ruchu takiego układu, stanowi główny przedmiot

mechaniki nieba. Na podstawie ogólnych zasad mechaniki analitycznej zadanie to rozdziela się na dwa: jedno, *o ruchu środków ciężkości ciał składających układ*, drugie, *o ruchu ich własnym około tych środków ciężkości*. Nie koniec na tem, odkrywają się jeszcze pewne ogólne własności: jak, *prawo zachowania środka ciężkości całego układu*, *prawo zachowania pól*, wynikająca z tąd *niezmienna płaszczyzna* i *prawo zachowania sił żywych*. Takie są mniej więcej w ogóle wypadki, które mechanika analityczna dla tego zagadnienia daje; reszta rozwiązania zależy tylko od samej matematyki, która niestety dotąd jeszcze nie zdobyła się na zupełne odpowiedzi tak w pierwszej jak i drugiej jego części. Szczególniej część pierwsza pozostawia wiele do życzenia, sławne tak zwane *zadanie trzech ciał*, dotąd jeszcze nierozwiązane, stanowi jej istotę.

To przypomnienie definicyi mechaniki analitycznej i streszczenie głównego jej przedmiotu i celu, nie jest zrobionem na próżno. Mając wprowadzić czytelnika w dziedzinę *mechaniki cząsteczkowej*, nauki nowej i pierwszy raz sposobem rozumowanym traktowanej, powinienem był wykazać głęboko i jasno stanowisko nauki ścisłej w ogóle, ażeby wiedzieć dobrze czego od niej wymagać, a co do niej nie należy. Najlepszym przykładem w tym celu zdawała mi się być mechanika analityczna, nietylko z tego względu jako nauka ścisła, ale dlatego jeszcze, że wiąże się z mechaniką cząsteczkową, a przynajmniej pojęcia jej główne w tej ostatniej nauce ważną, jak zobaczymy niżej, odgrywają rolę.

2. Definicya Mechaniki Cząsteczkowej. — Przyjąwszy że ciała są zupełnie *sztywne*, wszystkie zasadnicze prawa ich ruchu wyprowadzają się w mechanice analitycznej, i jak powiedzieliśmy, na podstawach ścisłych i racyonalnych. W naturze jednak ciała sztywne nie istnieją; ażeby więc można było mieć prawa ruchu ciał *naturalnych*, potrzeba wprowadzić do mechaniki analitycznej pewne warunki, wyni-

kające z ich *niesztywności*. Warunki te zmieniają prawa w niej znalezione, nawet i dla *ciał stałych*, które w przybliżeniu za sztywne uważać także można.

Jedynym objawem *niesztywności ciał naturalnych*, i zarazem jedyną różnicą pomiędzy ciałami *sztywnemi* i ciałami *naturalnemi*, jest ten niezaprzeczony fakt, że te ostatnie zmieniają swój kształt pod wpływem sił na nie działających, lub mówiąc dokładniej, że względne położenia ich punktów, na które działają siły bezpośrednio lub pośrednio, zmieniają się. Zjawisko to określamy mówiąc, *że ciało się odkształca*.

Otóż, *mechanika cząsteczkowa zajmuje się zbadaniem praw, według których ciała się odkształcają*, *i podobnie jak mechanika analityczna w swoim zakresie*, *podaje ogólne reguły na rozwiązanie zadań tychże praw dotyczących*.

Nie wynika ztąd ażeby każde zadanie mechaniki cząsteczkowej mogło być zupełnie rozwiązane; i tu również, jak w główném zadaniu mechaniki nieba, napotyka się trudności matematyczne, których pokonać dzisiaj niepodobna.

W taki sposób określona mechanika cząsteczkowa nie może być uważana jako przykład do mechaniki analitycznej, ale stanowi oddzielną zupełnie naukę, mającą prawo w dziedzinie innych nauk, do równego z nią obywatelstwa. I rzeczywiście, jeżeli mechanika analityczna posiada wiele przykładów w naturze, do których należy i mechanika nieba, mechanika cząsteczkowa posiada je obecnie, jak to w ciągu niniejszego wykładu zobaczymy, *w hydrodynamice i hydrostatyce*, *w teoryi sprężystości ciał stałych*, *w teoryi włoskowatości*, *w teoryi światła i ciepła*. Spodziewać się nawet można, że obejmie z czasem cały obszar zjawisk fizycznych i chemicznych, a kto wie, czy nawet prawo powszechnego ciążenia nie będzie kiedyś także bardzo prostym wynikiem jej badań.

3. Pojęcia o budowie materyi. — Nadawszy tak obszer-

ne znaczenie mechanice cząsteczkowej, wypada się teraz zastanowić nad dwiema następującemi kwestjami. Najprzód, należy rozpoznać zasady na którychby naukę tę oprzeć można było, powtóre, po rozpoznaniu ich, rozebrać krytycznie, czy jest możliwem obecnie wykładać ją sposobem rozumowanym, na nich się opierając.

Pierwszą myślą która się co do pierwszego punktu nasuwa, jest niezawodnie *budowa materyi.* Tutaj więc fizyka doświadczalna i chemia powinny dostarczyć faktów, a z nich, przez rozumowanie, powinniśmy dojść do pewnych pojęć o wewnętrznym układzie ciał naturalnych.

Wiadomo jest, że każde ciało może być w dowolny sposób podzielone na pewną liczbę części, i że ta podzielność rozciąga się tak daleko, iż jest niemożliwem nietylko dojście do jej granicy, ale nawet samo jej oznaczenie. Na dowód tego faktu, dosyć jest przytoczyć że *ziarnko piżma* umieszczone w dość obszernym pokoju, zapełnia go mocnym bardzo zapachem, i jednak może tam zostawać przez lat kilka, bez zmniejszenia swojego ciężaru.

Wobec tak wielkiej podzielności materyi można zrobić dwa przypuszczenia co do jej budowy: albo przyjąć że materya jest podzielną do nieskończoności, co wychodzi na to samo, jakby ją uważać za ciągłą; albo też przypuścić, że dzieląc materyę na coraz drobniejsze części dochodzi się w końcu do cząstki już *niepodzielnej*, do *cząsteczki* lub *molekuły.* W tem drugiem założeniu, należy sobie wyobrazić że materya jest układem nieoznaczonej liczby punktów materyalnych, lub właściwie, nadzwyczajnie małych cząsteczek już niepodzielnych, umieszczonych jedne obok drugich w pewnych od siebie odległościach, mogących się przyciągać lub odpychać, albo nareszcie, zajmować stałe względem siebie położenia.

Podobnie jak do ustalenia dwóch dopiero wymienionych

hypotez przyszliśmy przez doświadczenie, doświadczenie również powinno roztrzygnąć, która z nich ma większe prawdopodobieństwo. Chemia zajmująca się poznaniem wewnętrznej natury ciał, stanowi jedyny materyał do naszych badań; na tém więc miejscu wypadałoby wyłożyć wszystkie jej zasadnicze prawa, i mniej więcej sposoby i doświadczenia które do nich doprowadziły. Nie mając jednak zamiaru opierać wykładu mechaniki cząsteczkowej na żadnych przypuszczeniach, kompletny wykład teoretycznej chemii byłby za zbyteczny; poprzestaniemy zatem tylko na przypomnieniu i uogólnieniu *definicyi równoważnika*, odsyłając czytelnika po resztę do dzieła p. JAMIN'a, p. t. *Cours de physique de l'École Politechnique* (Tom I, str. 10, *sur la constitution de la matière*), i do dzieła p. J. NATANSONA, p. t. *Wykład Chemii Organicznej, podług systemu unitarnego* (Część I, *Część ogólna*).

Pierwszą klasyfikacyą jaką zrobić można pomiędzy ciałami, na podstawie własności chemicznych, jest podział ich na *pierwiastki* i *ciała złożone*, rozumiejąc przez *pierwiastki* te ciała, których w obecnym stanie nauki rozłożyć nie umiemy, a przez *ciała złożone* wszystkie pozostałe, składające się z więcej jak jednego pierwiastku.

Każdemu ciału odpowiada pewna, jedyna liczba, zwana jego *równoważnikiem* i posiadająca następujące własności:

1° Jeżeli A, B, C, D, ... oznaczają równoważniki pierwiastków, równoważnik R każdego ciała złożonego ma kształt

$$R = mA + nB + pC + qD + \dots,$$

gdzie $m, n, p, q, \dots$ są liczbami całkowitemi dodatnemi, nie dowolnemi, lecz mającemi pewne oznaczone wartości. Tak np. gdyby A było równoważnikiem *azotu*, a B równoważnikiem *tlenu*, mielibyśmy tylko

$$R = A + B, \quad \text{lub} \quad R = A + 2B, \quad \text{lub} \quad R = A + 3B,$$
$$\text{lub} \quad R = A + 4B, \quad \text{lub} \quad R = A + 5B,$$

jeżeli R ma być równoważnikiem związku powstałego z połączenia się tlenu z azotem.

2° Chociażby nawet ilości A, B, C, D, ... oznaczały równoważniki ciał złożonych, równoważnik ciała z połączenia się ich powstałego, ma także podobną formułę.

3° Jeżeli P jest ciężarem ciała z pierwiastków A, B, C, D, ... złożonego i mającego za równoważnik ilość R, to ażeby znaleźć odpowiednie ciężary pierwiastków w skład jego wchodzących, należy ciężar P rozdzielić w stosunku liczb mA, nB, pC, qD, ...

4° Stosunki pomiędzy równoważnikami gazów i ciężarami ich właściwemi zachodzące, są liczbami stałemi, rozumiejąc pod nazwą gazów nietylko gazy *trwałe*, ale i pary ciał *lotnych* w temperaturach, w których stosują się do prawa MARIOTTA.

5° Iloczyny z równoważników pierwiastków przez współczynniki wyrażające ciepło właściwe w stanie ich stałym, są liczbami stałemi, z wyjątkiem: *węgla*, *boru* i *krzemu*, dla których prawo to nie stosuje się.

Wymienione teraz własności równoważników dowodzą zdaje się dostatecznie, że jeżeli nie one same, to przynajmniej stosunki pomiędzy niemi zachodzące, nie są liczbami dowolnemi, ale przeciwnie, są ilościami ściśle i dokładnie oznaczonemi; zkąd wypada najważniejsze dla nas prawo, *że pierwiastki tworząc związek chemiczny, łączą się z sobą w stosunkach oznaczonych.*

Mając na myśli to zasadnicze prawo chemii, łatwo jest wyobrazić sobie, że przez dzielenie materyi na coraz drobniejsze części, powinniśmy w końcu dojść do takiej, która się tylko może rozdzielić na części do mA, nB, pC, qD, ... proporcyonalne, a więc, która się już rozłoży chemicznie. Tu jest właśnie granica podziału fizycznego i zarazem dowód, że materyi wogóle dzielić bez końca nie można, bez naruszenia jej

chemicznego składu, ale przeciwnie, że dzieląc ją na coraz drobniejsze części, otrzymamy w końcu najmniejszą jej cząstkę, fizycznie już nie podzielną, która się nazywa *cząsteczką*.

W ten sposób usprawiedliwiony byt *cząsteczki* (*molekuły*) z jednej strony, a ze strony drugiej, znana własność rozszerzania się ciał w skutek ciepła, a nawet, możność przechodzenia ich ze stanu *stałego* w *ciekły* a w końcu w *lotny* lub nawzajem, bez naruszenia składu chemicznego, przemawiają za większem prawdopodobieństwem hypotezy drugiej, podług której, *ciała składają się z cząsteczek niepodzielnych fizycznie* (*molekuł*), *umieszczonych jedne obok drugich w pewnych od siebie odległościach*, *i mogących się przyciągać lub odpychać, albo też zajmować stałe względem siebie położenia*.

Na tej zasadzie, poznanie praw odkształcania się ciała, sprowadziłoby się widocznie do poznania praw ruchu względnego cząsteczek go składających, lub ostatecznie, do rozwiązania głównego zadania mechaniki analitycznej, w przypadku gdy ciała składające układ mechaniczny, posiadają wymiary nadzwyczajnie małe w stosunku do ich wzajemnych odległości. Nieznajomość praw podług których *molekuły* działają na siebie, robi zadanie w ogólności nieoznaczonem; dla rozwiązania więc go w pewnych szczególnych przypadkach, potrzebaby się znowuż uciekać do innych przypuszczeń, mających także większe lub mniejsze prawdopodobieństwo.

Widzimy zatem że mechanika cząsteczkowa na takich zasadach oparta nie mogłaby być nauką *ścisłą* dopóty, dopókiby one same nie nabyły wartości pewników; gdy zaś obecnie wypadku tego przewidzieć nie umiemy, należy mechanikę cząsteczkową oprzeć na innej zasadzie i to takiej, ażeby prawa z niej otrzymane zostały prawdziwemi w każdym razie, czyby przypuszczenie, któreśmy o budowie materyi przyjęli, było prawdziwém czy nieprawdziwém. Istota tej nowej zasady zawiera się w ustępie następującym.

4. Inna zasada. — Niech będą trzy funkcye (u, v, w), czterech zmiennych niezależnych (x, y, z, t), zadosyć czyniące dwóm następującym warunkom:

a) że są *jednogatunkowemi* wraz z ilościami x, y, z, t. j. że trzy ilości (x, y, z) i odpowiadające im wartości funkcyj u, v, w, mierzą się tą samą jednostką,

b) że są skończone i ciągłe w pewnym przedziale wartości zmiennej t, i na wszystkie wartości zmiennych x, y, z, które są współrzędnemi prostokątnemi pewnej *ograniczonej i ciągłej przestrzeni.*

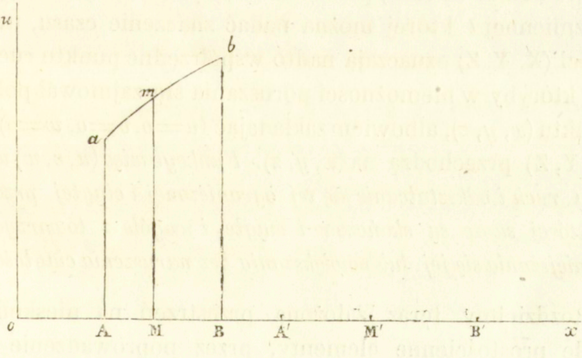
Zważywszy na te dwa warunki, oczywistem jest że ilości

$$X = x + u, \quad Y = y + v, \quad Z = z + w$$

wyobrażają także współrzędne prostokątne również ograniczonej i ciągłej przestrzeni, różnej jednak od przestrzeni poprzedzającej z położenia i kształtu.

Zauważyć należy, że objętosć tej nowej przestrzeni różną jest wogóle od objętości przestrzeni poprzedzającej, t. j. że może być od niej większą lub nawet mniejszą.

Ażeby można było własność tę łatwiej zrozumieć, weźmy



przypadek szczególny, w którym trzy funkcye (u, v, w), spro-

wadzają się do jednej [$u = f, (x, t)$] dwóch zmiennych niezależnych (x, t). W takiem założeniu mamy tylko $x = x + u$, a przestrzeń dana jest odcinkiem prostej AB, której kierunek schodzi się z kierunkiem osi x.

Na płaszczyznie dwóch osi *ox i ou* do siebie prostopodłych nakreślmy krzywę mającą za równanie $u = f(x, t)$ i zachowajmy tę jej część *amb* która przypada w granicach ciągłości funkcyi u, od $x = o$A do $x = o$B. Równanie $x = x + u$, uważane tylko w pomienionym przedziale, wyobraża odcinek A'B' na osi x leżący, którego każdy punkt M' otrzymuje się przecinając tęż oś okręgiem koła, mającym za promień rzędną M*m* krzywej *amb*, a za środek spodek jej M.

Jeżeli nakreślona krzywa *amb* wyobraża nadto że funkcya u w granicach swojej ciągłości rośnie lub tylko maleje, co zakładamy, nowy odcinek A'B', jak łatwo na figurze widzieć można, może być dłuższym lub krótszym od odcinka danego AB, co już jest dostatecznem ażeby wnieść wogóle, że objętość przestrzeni zamykającej współrzędne (X, Y, Z) może być większą lub mniejszą od objętości przestrzeni zamykającej współrzędne (x, y, z).

Nie koniec na tem; ponieważ funkcye (u, v, w) zależą jeszcze od zmiennej t której można nadać znaczenie czasu, uważane ilości (X, Y, Z) oznaczają nadto współrzędne punktu ruchomego, któryby w niemożności poruszania się zajmował położenie punktu (x, y, z), albowiem zakładając ($u = o$, $v = o$, $w = o$), ilości (X, Y, Z) przechodzą na (x, y, z). *Funkcye więc* (u, v, w) *wyobrażają ruch i odkształcanie się tej ograniczonej i ciągłej przestrzeni w której same są skończone i ciągłe, i wogóle z towarzyszeniem zmniejszania się jej, lub powiększania bez naruszenia ciągłości.*

Rozdzielmy teraz założoną przestrzeń na nieskończenie małe prostościenne elementy, przez poprowadzenie dostatecznej liczby płaszczyzn równoległych do płaszczyzn współ-

rzędnych, i zauważmy że przestrzeń ta po odkształceniu się nie przestaje być ciągłą. Ponieważ oprócz tego liczba jej elementów zostaje także tą samą, dzieje się to w ten sposób *że odkształcanie się ograniczonej i ciągłej przestrzeni, określone przez funkye (u, v, w) skończone i ciągłe w jej granicach, jest wynikiem samych tylko odkształcań się elementów, na które podzieloną została.*

Podobna zasada, do zawierającej się w dwóch dopiero co dowiedzionych twierdzeniach, jest podstawą *rachunku przemienności* (*Calcule de variations*), zobaczymy zaś w ciągu dalszym z jaką korzyścią użyje się w rozwiązaniu *głównego zadania mechaniki cząsteczkowej*.

LEKCYA II

Odkształcenia nieskończenie małego elementu. — Definicya głównego zadania mechaniki cząsteczkowej. — Zasady jego rozwiązania. — Definicya pracy mechanicznej i jej przyrostu. — Przekształcenie przyrostu pracy mechanicznej całej przestrzeni. — Równania ruchu.

5. Odkształcenia nieskończenie małego elementu. — Zanim przystąpimy do sformułowania i rozwiązania głównego zadania mechaniki cząsteczkowej, wypada pierwej zapoznać się z temi ilościami które przedstawiają odkształcenia jednostki nieskończenie małego elementu przestrzeni. Ilości te znajdziemy za pomocą następującego rozumowania.

Jeżeli punkt M w skutek odkształcania się pewnej ciągłej przestrzeni zajmuje inne położenie M′, współrzędne jego pierwotne (x, y, z) zamienią na $(x+u,\ y+v,\ z+w)$, rozumiejąc przez ilości (u, v, w) [I, **4**] funkcye zamiennych (x, y, z, t) jednogatunkowe wraz z ilościami (x, y, z), skończone i ciągłe w pewnym przedziale wartości zmiennej t wyobrażającej czas, i na wszystkie wartości współrzędnych (x, y, z) całej przestrzeni do której punkt M należy. Dla tych powodów współrzędne punktu M_1 $(x+dx,\ y,\ z)$ zamienią się na

$$M'_1\left(x + dx + u + \frac{du}{dx}dx,\quad y + v + \frac{dv}{dx}dx,\quad z + w + \frac{dw}{dx}dx\right);$$

współrzędne punktu M_2 $(x, y+dy, z)$ zamieniają się na

$$M'_2(x+u+\frac{du}{dy}dy, \quad y+dy+v+\frac{dv}{dy}dy, \quad z+w+\frac{dw}{dy}dy);$$

i nareszcie, współrzędne punktu M_3 $(x, y, z+dz)$ zamienią się na

$$M'_3(x+u+\frac{du}{dz}dz, \quad y+v+\frac{dv}{dz}dz, \quad z+dz+w+\frac{dw}{dz}dz).$$

Rzutami więc na osie współrzędnych wzajemnych odległości każdych dwóch punktów M' i M'_1, M' i M'_2, M' i M'_3 są ilości:

$$(1) \quad \begin{cases} \left(1+\frac{du}{dx}\right)dx, & \frac{dv}{dx}dx, & \frac{dw}{dx}dx, & \text{dla } M'M'_1, \\ \frac{du}{dy}dy, & \left(1+\frac{dv}{dy}\right)dy, & \frac{dw}{dy}dy, & \text{dla } M'M'_2, \\ \frac{du}{dz}dz, & \frac{dv}{dz}dz, & \left(1+\frac{dw}{dz}\right)dz, & \text{dla } M'M'_3; \end{cases}$$

podczas gdy odpowiedniemi rzutami odległości ich pierwotnych są ilości:

$$\begin{array}{llll} dx, & 0, & 0, & \text{dla } MM_1, \\ 0, & dy, & 0. & \text{dla } MM_2, \\ 0, & 0, & dz, & \text{dla } MM_3. \end{array}$$

Ponieważ iłości dx, dy, dz są nieskończenie małe, *trzy prostolinijne krawędzie* ($MM_1 = dx$, $MM_2 = dy$, $MM_3 = dz$), *do siebie prostopadłe i wychodzące z punktu* M, zostają po odkształceniu *także prostolinijnemi*, a dla tej przyczyny *ilości* (1) *są ich rzutami po odkształceniu się. Te same ilości* (1) *są także rzutami wszystkich krawędzi nieskończenie małego prostościennego elementu*

dxdydz po jego odkształceniu się. Ażeby się o tem przekonać uważmy np. krawędź jego dx, której dwa końce mają za odpowiednie współrzędne

$$(x,\ y,\ z+dz) \quad \text{i} \quad (x+dx,\ y,\ z+dz)$$

przed odkształceniem się, a zatem

$$\left(x+u+\frac{du}{dz}dz,\quad y+v+\frac{dv}{dz}dz,\quad z+dz+w+\frac{dw}{dz}dz\right)$$

$$\left(x+dx+u+\frac{dx}{du}dx+\frac{du}{dz}dz,\quad y+v+\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dz}dz,\right.$$

$$\left. z+dz+w+\frac{dw}{dx}dx+\frac{dw}{dz}dz\right)$$

po odkształceniu się. Biorąc różnice pomiędzy odpowiadającemi sobie nowemi współrzędnemi znajdujemy na rzuty pomienionej krawędzi ilości,

$$\left(1+\frac{du}{dx}\right)dx,\quad \frac{dv}{dx}dx,\quad \frac{dw}{dx}dx,$$

takie same jakieśmy wyżej pod (1) otrzymali, co już jest wystarczającem ażeby twierdzenie nasze za dowiedzione uważać można było. Zważywszy nadto że element $dxdydz$ jest nieskończenie małym, ściany jego nie przestają być płaskiemi i po odkształceniu się, zkąd oczywiście wynika, że element prostościenny zamieni się po odkształceniu na równoległościenny. Widocznem jest przeto, że znając trzy współczynniki (α, β, γ) rozszerzalności trzech krawędzi (dx, dy, dz) i trzy kąty (φ, χ, ψ) o jakie się one pochylą ku sobie, znamy tem samem odkształcenia całego elementu. Ilości te otrzymują się z równań

$$
(2)\quad
\begin{cases}
(1+\alpha)^2 = \left(1+\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2, \\
(1+\beta)^2 = \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(1+\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2, \\
(1+\gamma)^2 = \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \left(1+\frac{dw}{dz}\right)^2, \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \dfrac{\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \left(1+\frac{dv}{dy}\right)\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\left(1+\frac{dw}{dz}\right)}{(1+\beta)(1+\gamma)}, \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right) = \dfrac{\frac{du}{dz}\left(1+\frac{du}{dx}\right) + \frac{dv}{dz}\frac{dv}{dx} + \left(1+\frac{dw}{dz}\right)\frac{dw}{dx}}{(1+\gamma)(1+\alpha)}, \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) = \dfrac{\left(1+\frac{du}{dx}\right)\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\left(1+\frac{dv}{dy}\right) + \frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}}{(1+\alpha)(1+\beta)};
\end{cases}
$$

w których

$$(1+\alpha)dx, \quad (1+\beta)dy, \quad (1+\gamma)dz$$

są długościami krawędzi dx, dy, dz po odkształceniu się, a

$$\frac{\pi}{2}-\varphi, \quad \frac{\pi}{2}-\chi, \quad \frac{\pi}{2}-\psi$$

wyobrażają kąty pomiędzy niemi zawarte.

Objętość odkszałconego elementu $dxdydz$ znajduje się za pomocą znanego wzoru

$$V = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$$
$$\times \sqrt{1-\sin^2\varphi-\sin^2\chi-\sin^2\psi+2\sin\varphi\sin\chi\sin\psi}\; dxdydz;$$

oznaczając zatem przez θ rozszerzenie jego jednostki, mamy

oczywiście

$$(3)\qquad \theta=(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$$

$$\times\sqrt{1-\sin^2\varphi-\sin^2\chi-\sin^2\psi+2\sin\varphi\sin\chi\sin\psi}-1.$$

Uwaga. — W przypadku kiedy pochodne, funkcyi u, v, w, względem x, y, z, są nieskończenie małemi, w równaniach (2) ilości nieskończenie małe drugiego rzędu należy opuścić, w skutek czego równania te zamienią się na następujące:

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha=\dfrac{du}{dx} \quad \beta=\dfrac{dv}{dy} \quad \gamma=\dfrac{dw}{dz} \\[2ex] \varphi=\dfrac{dv}{dz}+\dfrac{dw}{dy} \quad \chi=\dfrac{dw}{dx}+\dfrac{du}{dz} \quad \psi=\dfrac{du}{dy}+\dfrac{dx}{dv}; \end{cases}$$

współczynnik zaś rozszerzalności θ przyjmie postać

$$(5)\qquad \theta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}.$$

Dziewięć pochodnych

$$\frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy},\ \frac{du}{dz},$$
$$\frac{dv}{dx},\ \frac{dv}{dy},\ \frac{dv}{dz},$$
$$\frac{dw}{dx},\ \frac{dw}{dy},\ \frac{dw}{dz},$$

oznaczać będziemy dla skrócenia przez jeden symbol $\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$; od chwili zaś, kiedy będzie mowa o samych tylko sześciu ilościach

$$\frac{du}{dx},\ \frac{dv}{dy},\ \frac{dw}{dz},\ \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\ \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz},\ \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx},$$

pomieniony symbol również przypominać je będzie.

6. Definicya głównego zadania Mechaniki Cząsteczkowej. — Zapoznawszy się z ilościami dającemi odkształcenia jednostki nieskończenie małego elementu ciągłej przestrzeni, przystępujemy do sformułowania a następnie do rozwiązania głównego zadania mechaniki cząsteczkowej. Przedmiot ten rozpocznie się od pewnych, niezbędnych definicyj.

Wiadomo że pojęcie *pracy mechanicznej* jest nierozdzielne od pojęcia *oporu*. Jeżeli siła zmusza punkt materyalny do poruszania się, praca jej mechaniczna usiłuje pokonać opór, który tenże punkt przeciwstawia zmianom jego ruchu; opór ten nazywa się *siłą bezwładności*. W ruchu prostolinijnym siła bezwładności jest proporcyonalną do przyspieszenia; oznaczając przez B jej wielkość a przez p przyspieszenie, mamy

$$B = Mp.$$

Podług tej formuły, *massa* M *punktu materyalnego jest współczynnik siły bezwładności*.

W ciele jednorodnem massa jest proporcyonalną do objętości; *stosunek massy do objętości* $\frac{M}{V}$ *jest gęstością ciała jednorodnego*.

Wymienione teraz definicye massy i gęstości nie mają nic wspólnego z budową materyi: *massa* i *gęstość* są to pewne liczby otrzymane z rozumowania i doświadczenia.

Jeżeli ΔV oznacza najmniejszą możliwą objętość ciała a ΔM massę jego, tej objętości odpowiadającą, stosunek massy do objętości $\frac{\Delta M}{\Delta V}$ wyobrażający średnią gęstość massy ΔM, będziemy nazywali gęstością ciała w punkcie (x, y, z), przypadającym w środku ciężkości massy ΔM. Oznaczając ten stosunek przez ρ, nazwiemy *punktem należącym do ciała*, lub krócej, *punktem ciała*, massę $\rho dxdydz$.

Massa ($\Delta M = \rho \Delta V$) zawarta w najmniejszej możliwej objętości ciała nazywa się *cząsteczką ciała* lub *molekułą*, i różni się od punktu ciała ($\rho dxdydz$) samą tylko objętością: objętosć cząsteczki jest skończoną, objętość punktu jest nieskończenie małą.

Z przyczyny nadzwyczajnej małości cząsteczek, prawa odkształcania się ciała zależą tylko od względnego ruchu środków ciężkości molekuł go składających, a ztąd główne zadanie mechaniki cząsteczkowej sprowadza się do oznaczenia tego ruchu.

Nazwijmy przez (x_m, y_m, z_m) współrzędne tego punktu w którymby przypadał środek ciężkości cząsteczki w razie nieporuszania się jej, a przez ($x_m + u_m$, $y_m + v_m$, $z_m + w_m$) współrzędne tegoż środka ciężkości w czasie odkształcania się. Ilości (u_m, v_m, w_m) są funkcyami czasu t skończonemi i ciągłemi w tych jego granicach w których ciało odkształca się sposobem ciągłym, i posiadają różne wartości w różnych punktach ciała, albowiem każda jego cząsteczka porusza się w ogólności inaczej. Załóżmy następnie trzy jednogatuntowe funkcye

$$u = f_1(x, y, z, t), \quad v = f_2(x, y, z, t), \quad w = f_3(x, y, z, t)$$

jeszcze nieoznaczone, lecz skończone i ciągłe na wszystkie wartości zmiennej t, na które funkcye (u_m, v_m, w_m) posiadają te same własności, i na wszystkie wartości zmiennych (x, y, z) zawarte w przestrzeni ograniczonej powierzchnią ciała. Mając te dane można sformułować następujące zadanie:

Znaleźć trzy funkcye (u, v, w) *czterech zmiennych* (x, y, z, t) *skończone i ciągłe względem zmiennych* (x, y, z) *w całej przestrzeni ograniczonej powierzchnią ciała, a względem zmiennej t w tych samych granicach w których są skończone i ciągłe funkcye* (u_m, v_m, w_m), *i takie, ażeby w punktach* (x_m, y_m, z_m) *do ciała należących posiadały przypadające tam wartości funkcyj* (u_m, v_m, w_m).

Oto jest *główne zadanie mechaniki cząsteczkowej*. Przystępujemy do jego rozwiązania.

7. Zasady jego rozwiązania. — Zastąpmy naprzód cząsteczki $\rho\Delta V$ przez punkta $\rho dxdydz$, i dobierzmy taką funkcyę ρ zmiennych x, y, z skończoną i ciągłą w całej przestrzeni ograniczonej powierzchnią ciała, którejby wartości w punktach (x_m, y_m, z_m) do niego należących były gęstościami tam przynależnemi. W ten sposób każdy punkt (x, y, z) przestrzeni posiada massę $\rho dxdydz$, podobnie jak każdy punkt ciała, w analizie więc dalszej nie potrzeba już będzie odróżniać punktów należących do ciała i punktów należących do przestrzeni. W skutek tego, wartości funkcyj (u, v, w) posiadają taki sam charakter, we wszystkich punktach pomienionej przestrzeni, jaki mają wartości ich (u_m, v_m, w_m) w punktach należących do ciała; a zatem, w miejsce szukania tych ostatnich, możemy szukać wartości (u, v, w) przypadających w którymkolwiek punkcie przestrzeni, poddawszy go podobnym warunkom mechanicznym jakim punkty ciała podlegają.

Weźmy w tym celu pod uwagę punkt M (x, y, z) o massie

$$dm = \rho dxdydz.$$

Ponieważ ilości $(x + u, y + v, z + w)$ wyobrażają jego współrzędne w czasie t a ilości x, y, z od t nie zależą, składowemi *siły zachowanej* są jak wiadomo

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2}dxdydz, \quad \rho\frac{d^2v}{dt^2}dxdydz, \quad \rho\frac{d^2w}{dt^2}dxdydz.$$

Ażeby mieć równania dające funkcye u, v, w, należy znaleźć wartości *składowych siły pod wpływem której punkt* M *się porusza* i takowe z odpowiedniemi składowemi siły zachowanej porównać. W przypadku gdyby on był *wolnym*, szukana siła sprowadziłaby się tylko do *wypadkowej sił działających na jego massę* (tego np. rodzaju jak siła ciężkości); oznaczywszy zatem przez X_0, Y_0, Z_0 jej składowe dla jednostki massy,

różnice

(6) $\rho\left(X_0-\frac{d^2u}{dt^2}\right)dxdydz,\quad \rho\left(Y_0-\frac{d^2v}{dt^2}\right)dxdydz,\quad \rho\left(Z_0-\frac{d^2w}{dt^3}\right)dxdydz$

przyrównane do zera dostarczyłyby szukanych równań. Lecz punkt o którym mowa nie jest zupełnie wolnym, ale podlega pewnym warunkom geometrycznym, wynikającym z prawa według którego odkształca się przestrzeń do której należy; z tego więc powodu różnice (6) nie są zerami, lecz są równemi siłom z pomienionych warunków wynikającym. Siły te znajdziemy jak następuje.

8. Definicya pracy mechanicznej i jej przyrostu. — Można sobie łatwo wyobrazić, że na odkształcanie się przestrzeni powierzchnią ciała ograniczonej zużywa się pewna *praca mechaniczna*, zależna oczywiście od tych samych ilości od których zależą zmiany doznawane przez wymiary tej przestrzeni. Jeżeli przestrzeń odkształca się sposobem jednostajnym, pomienione ilości odnoszą się do jednostek jej wymiarów, a funkcya od nich zależna może przedstawiać pracę mechaniczną jednostki przestrzeni. Podobne prawo stosuje się także do nieskończenie małego elementu *dxdydz*. Oznaczywszy przez P wartość pracy mechanicznej jednostki takiego elementu, mamy

(7) $$P=F\left\{\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\right\},$$

albowiem ilości $(\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \chi, \psi)$ (2), wyobrażające odkształcenia jego jednostki, zależą od $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$; praca więc odpowiadająca całemu elementowi jest równą $P\,dxdydz$, a całka $\int\int\int P\,dxdydz$ wzięta w całej przestrzeni jest pracą zużytą na jej odkształcanie się.

Założenie najogólniejszego sposobu odkształcania się przestrzeni pociąga za sobą wszelki możliwy sposób poruszania się względnego punktów do ciała należących, którym, z tego powodu, przypisać można ruch taki sam, jaki posiadają środki ciężkości molekuł. Przez zastąpienie więc cząsteczek punktami ciała nie ogranicza się bynajmniej prawa, według którego środki ich ciężkości zmieniają względne swoje położenia.

Praca mechaniczna P jako funkcya zmiennych x, y, z, t jest skończoną i ciągłą na wszystkie wartości zmiennych x, y, z w całej przestrzeni ograniczonej powierzchnią ciała i na wszystkie wartości czasu t zawarte w tym przedziale, w którym ciało odkształca się sposobem ciągłym. Nadając przeto zmiennej t przyrost nieskończenie mały δt, praca mechaniczna P nabywa przyrostu także nieskończenie małego δP, który pomienione wyżej własności pracy P zachowuje.

Z definicyi funkcyi P (7) wynika bezpośrednio, że przyrost jej δP można przedstawić pod postacią

$$(8) \qquad \delta P = \left\{ \begin{aligned} & T_{1,1}\delta\frac{du}{dx} + T_{1,2}\delta\frac{dv}{dx} + T_{1,3}\delta\frac{dw}{dx} \\ & + T_{2,1}\delta\frac{du}{dy} + T_{2,2}\delta\frac{dv}{dy} + T_{2,3}\delta\frac{dw}{dy} \\ & + T_{3,1}\delta\frac{du}{dz} + T_{3,2}\delta\frac{dv}{dz} + T_{3,3}\delta\frac{dw}{dz} \end{aligned} \right\}$$

rozumiejąc przez współczynnik $T_{\alpha,\beta}$ pochodnę cząstkową pracy P względem tej ilości, przez której przyrost w różniczce δP jest pomnożonym.

9. Przekształcenie przyrostu pracy mechanicznej całej przestrzeni. — Potrójna całka

$$(9) \qquad \iiint \delta P \, dx dy dz,$$

w granicach całej przestrzeni powierzchnią ciała ograniczonej, przedstawia przyrost pracy mechanicznej w skutek odkształcania się zużytej. Całce tej można nadać inną postać za pomocą całkowania przez części, zastąpiwszy przedtem δP przez drugą stronę równania (8).

Jakoż, wykonywając to działanie i oddzielając różne wyrazy od całek potrójnych, każdy wyraz, np.

$$\int\int\int dxdydz\, T_{1,1}\, \delta \frac{du}{dx}$$

można zastąpić przez

$$\int\int dydz(T''_{1,1}\delta u'' - T'_{1,1}\delta u') - \int\int\int dxdydz \frac{dT_{1,1}}{dx}\delta u,$$

gdzie $T'_{1,1}\delta u'$ i $T''_{1,1}\delta u''$ są wartościami funkcyi $T_{1,1}\delta u$ w tych punktach powierzchni ω ograniczającej ciało, w których ją prosta równoległa do osi x spotyka.

Jeżeli $(d\omega)'$ i $(d\omega)''$ są elementami powierzchni ω w tych samych punktach przypadającemi, a m' i m'' dostawami kątów które normalne zewnętrzne do niej w nich poprowadzone tworzą z osią x, mamy oczywiście

$$dy\,dz = m''(d\omega)'' = -m'(d\omega)',$$

i całka podwójna

$$\int\int dy\,dz(T''_{1,1}\delta u'' - T_{1,1}\delta u'),$$

zamienia się na pojedyńczą

$$\int d\omega\, m\, T_{1,1}\delta u,$$

rozciągnioną na całą powierzchnię ciała. W ten sposób mamy

$$\int\int\int dxdydz\, T_{1,1}\, \delta \frac{du}{dx}$$

$$= \int d\omega\, m\, T_{1,1}\, \delta u - \int\int\int dxdydz\, \frac{dT_{1,1}}{dx} \delta u.$$

Oznaczając przez n i p dostawy kątów które normalna zewnętrzna do powierzchni ω tworzy z osiami y i z, i stosując podobne przerobienie do wszystkich wyrazów w całce (9) zachodzących, znajdziemy bardzo łatwo

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int\int\int \delta P\, dxdydz \\ & = \int\int\int dxdydz \left\{ \begin{aligned} & -\left(\frac{dT_{1,1}}{dx} + \frac{dT_{2,1}}{dy} + \frac{dT_{3,2}}{dz}\right) \delta u \\ & -\left(\frac{dT_{1,2}}{dx} + \frac{dT_{2,2}}{dy} + \frac{dT_{3,2}}{dz}\right) \delta v \\ & -\left(\frac{dT_{1,3}}{dx} + \frac{dT_{2,3}}{dy} + \frac{dT_{3,3}}{dz}\right) \delta w \end{aligned} \right\} \\ & + \int d\omega \left\{ \begin{aligned} & + (mT_{1,1} + nT_{2,1} + pT_{3,1})\, \delta u \\ & + (mT_{1,2} + nT_{2,2} + pT_{3,2})\, \delta v \\ & + (mT_{1,3} + nT_{2,3} + pT_{3,3})\, \delta w \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

Pierwsza strona tego równania przedstawia jak wiadomo przyrost pracy mechanicznej wykonanej w skutek odkształcenia się całej przestrzeni; druga więc jego strona, składająca się z całki potrójnej rozciągnionej na całą przestrzeń i całki pojedyńczej rozciągnionej na powierzchnią ω ją ograniczającą, posiada także takie same znaczenie.

10. Równania ruchu. — Ponieważ ilości $\delta u, \delta v, \delta w$ są rzutami położenia przygotowanego punktu M, współczynniki ich odpowiednie pod całką potrójną są składowemi siły na tenże punkt działającej i wynikłej oczywiście z prawa według którego przestrzeń się odkształca. Współczynniki te przeto powinny być równemi odpowiednim różnicom (6), zkąd znajdujemy, po opuszczeniu wspólnego czynnika *dxdydz*,

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dT_{1,1}}{dx} + \dfrac{dT_{2,1}}{dy} + \dfrac{dT_{3,1}}{dz} + \rho X_0 = \rho \dfrac{d^2u}{dt^2}, \\[2ex] \dfrac{dT_{1,2}}{dx} + \dfrac{dT_{2,2}}{dy} + \dfrac{dT_{3,2}}{dz} + \rho Y_0 = \rho \dfrac{d^2v}{dt^2}, \\[2ex] \dfrac{dT_{1,3}}{dx} + \dfrac{dT_{2,3}}{dy} + \dfrac{dT_{3,3}}{dz} + \rho Z_0 = \rho \dfrac{d^2w}{dt^2}, \end{cases}$$

równania, dające funkcye u, v, w w którymkolwiek punkcie założonej przestrzeni.

Współczynniki mnożące ilości $\delta u, \delta v, \delta w$ pod całką pojedyńczą są składowemi sił działających na nieskończenie małe elementa powierzchni ω, są więc to składowe ciśnień wywieranych na tęż powierzchnię, wskutek odkształcania się przestrzeni nią ograniczonej. Oznaczając je przez $d\omega X$, $d\omega Y$, $d\omega Z$, mamy

$$(12)\quad \begin{cases} mT_{1,1} + nT_{2,1} + pT_{3,1} = X, \\ mT_{1,2} + nT_{2,2} + pT_{3,2} = Y, \\ mT_{1,3} + nT_{2,3} + pT_{3,3} = Z. \end{cases}$$

LEKCYA III

Definicya ciśnienia na element płaski. — Uproszczenie równań ruchu. — Warunki na powierzchni. — Przypadek równowagi. — Ogólne uwagi. — Inny pogląd na główne zadanie mechaniki cząsteczkowej.

11. Definicya ciśnienia na element płaski. — Całkowanie przyrostu $\delta P\,dxdydz$, któreśmy wykonali [II, **9**] w całej przestrzeni ograniczonej powierzchnią ciała, można rozciągnąć tylko do pewnej jej części, bez naruszenia znalezionych wypadków (11) i (12) [II, **10**]. Ztąd funkcye (X, Y, Z) dane przez pierwsze strony równań (12) [**10**], w którymkolwiek punkcie przestrzeni, oznaczają także składowe ciśnienia wywieranego na jednostkę płaskiego elementu, którego normalna tworzy z osiami współrzędnych kąty mające za dostawy ilości m, n, p. Zakładając po kolei

$$m=1,\ n=0,\ p=0;\quad m=0,\ n=1,\ p=0;\quad m=0,\ n=0,\ p=1;$$

znajdujemy, że ilości pierwszego wiersza,

$$\begin{matrix} T_{1,1}, & T_{1,2}, & T_{1,3}; \\ T_{2,1}, & T_{2,2}, & T_{2,3}; \\ T_{3,1}, & T_{3,2}, & T_{3,3}; \end{matrix}$$

są składowemi ciśnienia na jednostkę elementu płaskiego $dydz$; ilości dwóch pozostałych wierszy są podobnemi składowemi odpowiednich ciśnień na jednostki elemetów płaskich $dzdx$ i $dxdy$.

12. Uproszczenie równań ruchu. — Sposób otrzymania równań (11) i (12) [**10**] polegał głównie, na definicyi pracy mechanicznej P, jako funkcyi (7) [II, **8**] dziewięciu

pochodnych $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$. Nie znając natury tej funkcyi zrobiliśmy o niej założenie jak najogólniejsze, przez co otrzymane wypadki (11) i (12) [**10**], mogą być jeszcze uproszczonemi jeżeli funkcya P zależy od ilości $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ w pewien szczególny sposób. Ażeby się o tem przekonać należy i wystarczy sprawdzić równania (11) i (12) [**10**], wychodząc z innego punktu widzenia.

Szukajmy w tym celu momentów siły działającej na jednostkę objętości elementu $dxdydz$. Składowemi jej są oczywiście pierwsze strony równań (11) [**10**].

Ażeby mieć moment względem osi x, potrzeba od drugiego z równań (11) [**10**] pomnożonego przez z odjąć trzecie pomnożone przez y. To prowadzi do wypadku

$$\frac{d(zT_{1,2} - yT_{1,3})}{dx} + \frac{d(zT_{2,2})}{dy} - y\frac{dT_{2,3}}{dy} + z\frac{dT_{3,2}}{dz} - \frac{d(yT_{3,3})}{dz}$$
$$+ \rho(zY_0 - yZ_0) = \rho\left(z\frac{d^2v}{dt^2} - y\frac{d^2w}{dt^2}\right),$$

lub do pierwszego z równań

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d(zT_{1,2} - yT_{1,3})}{dx} + \frac{d(zT_{2,2} - yT_{2,3})}{dy} + \frac{d(zT_{3,2} - yT_{3,3})}{dz}\\
&\quad + \rho(zY_0 - yZ_0) + (T_{2,3} - T_{3,2}) = \rho\left(z\frac{d^2v}{dt^2} - y\frac{d^2w}{dt^2}\right),\\
&\frac{d(xT_{1,3} - zT_{1,1})}{dx} + \frac{d(xT_{2,3} - zT_{2,1})}{dy} + \frac{d(xT_{3,3} - zT_{3,1})}{dz}\\
&\quad + \rho(xZ_0 - zX_0) + (T_{3,1} - T_{1,3}) = \rho\left(x\frac{d^2w}{dt^2} - z\frac{d^2u}{dt^2}\right),\\
&\frac{d(yT_{1,1} - xT_{1,2})}{dx} + \frac{d(yT_{2,1} - xT_{2,2})}{dy} + \frac{d(yT_{3,1} - xT_{3,2})}{dz}\\
&\quad + \rho(yX_0 - xY_0) + (T_{1,2} - T_{2,1}) = \rho\left(y\frac{d^2u}{dt^2} - x\frac{d^2v}{dt^2}\right);
\end{aligned}\right.$$

z których dwa drugie otrzymują się powtarzając podobne działania z pozostałemi parami równań (12) [**10**].

Pamiętając o znaczeniu mechaniczném dziewięciu funkcyj $T_{\alpha,\beta}$, dostrzega się bardzo łatwo że ilości pierwszego wiersza

$$M_{1,1} = zT_{1,2} - yT_{1,3},\quad M_{1,2} = xT_{1,3} - zT_{1,1},\quad M_{1,3} = yT_{1,1} - xT_{1,2},$$

$$M_{2,1} = zT_{2,2} - yT_{2,3},\quad M_{2,2} = xT_{2,3} - zT_{2,1},\quad M_{2,3} = yT_{2,1} - xT_{2,2},$$

$$M_{3,1} = zT_{3,2} - yT_{3,3},\quad M_{3,2} = xT_{3,3} - zT_{3,1},\quad M_{3,2} = yT_{3,1} - xT_{3,2},$$

są składowemi momentu ciśnienia na jednostkę elementu płaskiego *dydz;* podczas gdy ilości pozostałych dwóch wierszy są podobnemi składowemi momentów ciśnień odpowiednich elementom *dzdx* i *dxdy*. Załóżmy także

$$P_0 = zY_0 - yZ_0,\quad Q_0 = xZ_0 - zX_0,\quad R_0 = yX_0 - xY_0.$$

Wiadome wspólne własności siłom i momentom przepisują oczywiście te same reguły na otrzymanie momentów, jednostki objętości elementu *dxdydz*, z momentów $M_{\alpha,\beta}$ i P_0, Q_0, R_0, podług których otrzymują się siły, na tęż jednostkę działające, z ciśnień $T_{\alpha,\beta}$ i składowych X_0, Y_0, Z_0; to jest, ażeby znaleźć pomienione momenta potrzeba i wystarczy zastąpić w pierwszych stronach równań (11) [**10**], ciśnienia $T_{\alpha,\beta}$ przez momenta $M_{\alpha,\beta}$, i składowe X_0, Y_0, Z_0 przez momenta P_0, Q_0, R_0. To daje bacząc na równania (1) trzy równości

(2) $$T_{2,3} = T_{3,2},\quad T_{3,1} = T_{1,3},\quad T_{1,2} = T_{2,1},$$

pociągające za sobą bardzo ważne następstwa.

Zakładając

$$T_{1,1} = N_1,\quad T_{2,2} = N_2,\quad T_{3,3} = N_3,$$

$$T_{2,3} = T_{3,2} = T_1,\quad T_{3,1} = T_{1,3} = T_2,\quad T_{1,2} = T_{2,1} = T_3,$$

przyrost δP (8) [8] przyjmuje postać

$$(3)\qquad \delta P = \left\{ \begin{array}{l} N_1 \delta \frac{du}{dx} + T_1 \delta \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\ + N_2 \delta \frac{dv}{dy} + T_2 \delta \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \\ + N_3 \delta \frac{dw}{dz} + T_3 \delta \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \end{array} \right\},$$

co dowodzi, że *praca mechaniczna* P *jednostki elementu* *dxdydz zależy tylko od sześciu ilości*

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dw}{dz}, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}.$$

Równania (11) [**10**] zamieniają się na

$$(4)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \rho X_0 = \rho \frac{d^2u}{dt^2}, \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + \rho Y_0 = \rho \frac{d^2v}{dt^2}, \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + \rho Z_0 = \rho \frac{d^2w}{dt^2}; \end{array} \right.$$

ciśnienia zaś (12) [**10**] na powierzchni

$$(5)\qquad \left\{ \begin{array}{l} mN_1 + nT_3 + pT_2 = X, \\ mT_3 + nN_2 + pT_1 = Y, \\ mT_2 + nT_1 + pN_3 = Z \end{array} \right.$$

dają następujące twierdzenie : *jeżeli w tym samym punkcie przestrzeni ilości* C i C′ *są cisnieniami wywieranemi na jednostki dwóch elementów płaskich* ω i ω′, *mających za odpowiednie normalne* L i L′, *rzut ciśnienia* C *na* L′ *jest równy rzutowi ciśnienia* C′

na L. Łatwo się przekonać że trzy równości (2) są szczególnym przypadkiem pomienionego twierdzenia.

13. Warunki na powierzchni. — Całki (u, v, w) sprawdzające równania (4) powinny jeszcze zadość uczynić pewnym warunkom na powierzchni ω. Warunkami temi są, podług okoliczności, albo nieruchomość jej punktów, to jest, wartości funkcyj (u, v, w) w nich przypadające są zerami; albo też, jeżeli powierzchnia jest wolną, pewne związki pomiędzy składowemi (5) zachodzące. W pierwszym razie formuły (5) dają ciśnienia w punktach nieruchomych, siły więc im równe i znaków przeciwnych, tam przyczepione, sprowadzą założony warunek. Jeżeli naprzykład, w przypadku drugim, powierzchnia ω doznaje z zewnątrz ciśnień normalnych, ciśnienie (5) powinno być także normalnem ale w ogóle nieoznaczonem. Wartość jego przedstawia formuła

$$m^2 N_1 + n^2 N_2 + p^2 N_3 + 2np T_1 + 2pm T_2 + 2mn T_3,$$

warunek zaś że jest normalnem wyraża się

$$mm' N_1 + nn' N_2 + pp' N_3 + (n'p + np') T_1 + (p'm + pm') T_2 + (m'n + mn') T_3 = 0,$$

gdzie ilości (m', n', p'), będące dostawami kątów które styczna w danym punkcie do powierzchni ω tworzy z osiami współrzędnych, sprawdzają równanie

$$mm' + nn' + pp' = 0,$$

albowiem (m, n, p) są dostawami kątów które normalna do powierzchni tworzy z temiż osiami.

14. Przypadek równowagi.—W przypadku gdy funkcye u, v, w od zmiennej t nie zależą, w całej przestrzeni ograniczonej powierzchnią ω panuje równowaga, i drugie strony

równań (4) są równemi zeru,

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dx}+\dfrac{dT_3}{dy}+\dfrac{dT_2}{dz}+\rho X_0=0\,, \\ \dfrac{dT_3}{dx}+\dfrac{dN_2}{dy}+\dfrac{dT_1}{dz}+\rho Y_0=0\,, \\ \dfrac{dT_2}{dx}+\dfrac{dT_1}{dy}+\dfrac{dN_3}{dz}+\rho Z_0=0\,. \end{cases}$$

Ponieważ pierwsze strony równań (5) są składowemi ciśnień na powierzchni ω, powstałych w skutek odkształcenia się przestrzeni, należy je dla sprowadzenia równowagi zniszczyć, przez przyłożenie sił im równych i działających w kierunkach przeciwnych. Z tego powodu, drugie strony równań (5) są składowemi sił zewnętrznych działających na powierzchnię ω i równoważących pomienione ciśnienia, a całki sprawdzające równania (6), sprawdzać także powinny, na powierzchni ω, równania (5) w których ilości X, Y, Z są danemi.

15. Ogólne uwagi. — Przeglądając to wszystko cośmy dotąd zrobili, dostrzega się bardzo łatwo że każde zadanie mechaniki cząsteczkowej sprowadza się zawsze do zcałkowania równań (4) lub (6), w których sześć funkcyi (N_i, T_i) (3) są pochodnemi cząstkowemi jednej funkcyi P (7) [8] sześciu ilości $\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$, a gęstość ρ jest daną funkcyą zamiennych (x,y,z). Obie funkcye P i ρ, jedna jako zależna od sześciu ilości $\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$, druga jako funkcya zmiennych (x,y,z), pozostają dotąd nieoznaczonemi, a z tego powodu równań (4) lub (6) całkować jeszcze nie można. Każde przeto zadanie mechaniki cząsteczkowej składa się z dwóch części: przedmiotem pierwszej jest wyznaczenie funkcyj P i ρ a tém samém równań (4) lub (6), przedmiotem drugiej części jest całkowanie

tychże równań. Część pierwszą nazwiemy *Częścią Różniczkową*, część drugą, *Częścią Całkową*.

Funkcye P i ρ zależą w ogóle od natury ciała, funkcya zaś P zależeć jeszcze może, w pewnych szczególnych przypadkach, od natury ruchu który chcemy badać. Z tąd równania (4), (5), (6) posiadają kształt różny w miarę okoliczności zależnych, bądź to od natury ciała, bądź to od natury ruchu, bądź nareszcie od jednego i drugiego razem. Dopokąd funkcye P i ρ są nieoznaczonemi, ostateczne wyniki zawierają się w równaniach (3), (4), (5), (6) i stanowią *rozwiązanie głównego zadania mechaniki cząsteczkowej*.

16. Inny pogląd na główne zadanie Mechaniki Cząsteczkowej. — Przedmiot w poprzedzającej i niniejszej lekcyi wyłożony wymaga jeszcze pewnego zastanowienia się. Widzieliśmy tam, że główne podstawy mechaniki cząsteczkowej zawierają się w definicyi punktu ciała [II, 6] i w definicyi pracy mechanicznej jednostki elementu *dxdydz* [II, 8]. W przypuszczeniu że ciało składa się z *cząsteczek* zostających względem siebie w pewnych odległościach i przyciągających się lub odpychających podług pewnego prawa, reguły odkształcania się ciała zawarte są tylko w prawach ruchu środków ciężkości tychże cząsteczek, z przyczyny nadzwyczajnej ich małości. Prawo przyciągania się lub odpychania ominęliśmy za pomocą definicyi pracy mechanicznej jednostki elementu *dxdydz*. Definicya ta odpowiada najogólniejszemu sposobowi odkształcenia się całej przestrzeni organiczonej powierzchnią ciała; ztąd pierwsze strony równań (4) pomnożone przez ΔV, dają składowe siły działającej na środek ciężkości cząsteczki ρΔV, a całki ich (*u*, *v*, *w*), w punktach do ciała należących, odpowiadają najogólniejszemu ruchowi tychże środków ciężkości, czyli, najogólniejszemu prawu podług którego ciało się odkształca. Taki sposób zapatrywania się na główne zadanie mechaniki cząsteczkowej daje oczywiście poznać, że żądanemi odpowiedziami są tylko te

wartości funkcyj (u, v, w) które przypadają w punktach ciała, i że całka $\int\int\int P\,dxdydz$, przedstawiająca pracę mechaniczną uważanej przestrzeni, nie przedstawia zarazem pracy która się zużywa na odkształcanie ciała.

Lecz główne zadanie mechaniki cząsteczkowéj można jeszcze traktować z innego punktu widzenia. Przyjąwszy za *massę* i *gęstość* definicye podane w ustępie [**6**], elementowi nieskończenie małemu $dxdydz$ należy oczywiście przypisać gęstość stałą ρ w całej jego przestrzeni, lub co na jedno wychodzi, massę $\rho dxdydz$. Ponieważ objętość jego zamienia się po odkształceniu na $(1+\theta)\,dxdydz$, gdzie współczynnik rozszerzalności θ dany jest przez drugą stronę równania (3) [II, **5**], gęstość ρ zamienia się na ρ' i mamy

$$\rho\,dxdydz = \rho'(1+\theta)\,dxdydz,$$

z powodu stałości całej jego massy. Z tąd znajdujemy formułę

$$\rho' = \frac{\rho}{1+\theta}$$

dającą gęstość ρ' w danym punkcie i w danym czasie.

Oznaczając przez M massę całej przestrzeni, a przez V jej objętość w czasie t, jest również oczywiście

$$M = \int\int\int \rho\,dxdydz = \int\int\int \rho'\,dxdydz,$$

$$V = \int\int\int (1+\theta)\,dxdydz,$$

a stosunek $\frac{M}{V}$ daje średnią gęstość massy M, zmieniającą się w ogóle z upływem czasu t.

Ta ostatnia własność, charakteryzująca pod względem me-

chanicznym ciało niesztywne, prowadzi do tego wniosku że opierając się na definicyach massy i gęstości niezależnych od budowy ciała, można traktować prawa jego odkształcania się w przypuszczeniu ciągłości materyi, albowiem to przypuszczenie nie wymaga warunku, ażeby średnia gęstość ciała była ilością stałą. Wypadek ten wreszcie nie jest wcale rażącym; pomienioną wyżej własność, średniej gęstości, wprowadziliśmy do nieskończenie małego elementu *dxdydz*, przez co i cała przestrzeń musi jej podlegać, pomimo ciągłego sposobu następowania po sobie tychże elementów. W takiém założeniu, gęstością ciała jest granica do której zamierza stosunek $\frac{\Delta M}{\Delta V}$, gdy ΔV nieograniczenie maleje, t. j.

$$\rho = \frac{dM}{dV} = \frac{dM}{dxdydz},$$

jeżeli bierzemy za objętość dV element *dxdydz*. Analiza poprzedzającej lekcyi stosuje się w zupełności do pomienionego założenia. Całki równań (4) lub (6) należą do ciała w każdym punkcie uważanej przestrzeni, a całka $\int\int\int P dxdydz$ przedstawia pracę mechaniczną zużytą na odkształcanie się ciała.

Podobny sposób zapatrywania się przyjęty był dotąd w *Hydrostatyce* i *Hydrodynamice* — myśmy go rozciągnęli i do mechaniki cząsteczkowej, spodziewając się przez to ujednostajnić tę naukę i wynaleźć wspólne prawa mechaniczne wszystkim ciałom w naturze. Nie wchodząc w przyczyny odkształcania się ciał naturalnych, ani też nie robiąc żadnych szczególnych przypuszczeń o budowie materyi, uważamy po prostu pewną ograniczoną przestrzeń zawierającą massę M o gęstości ρ zmiennej od punktu do punktu, zmieniającą swój kształt i gęstość z upływem czasu t, pod wpływem sił działających na jej powierzchnię, sił działających na jej massę i sił czyli ciśnień

wewnątrz niéj działających i wynikłych z warunków nieznanych według których materya jest zbudowaną. Ponieważ natury odkształcania się tej massy niczém nie ograniczamy, wypadki otrzymane z równań (5) lub (6) są, ze względu na prawa odkształcenia się, najogólniejszemi, rozumie się w granicach odkształcania się sposobem ciągłym.

Podobnie więc, jak w mechanice analitycznej uważają się ciała utworzone z materyi ciągłej i sztywnej, t. j. nie mogącej zmieniać ani kształtu ani gęstości, w mechanice cząsteczkowej ciało utworzone jest także z materyi ciągłej, posiadającej jednak możność zmieniania kształtu i gęstości. Tu jest właśnie wybitna cecha pomiędzy mechaniką analityczną i mechaniką cząsteczkową, cecha, pokazująca jasno różnicę pomiędzy niemi zachodzącą i dająca zarazem niezbity dowód prawa obywatelstwa tej ostatniej umiejętności pomiędzy innemi umiejętnościami.

Dwojaki sposób otrzymania równań (3), (4), (5), (6) stawia rozwiązanie głównego zadania mechaniki cząsteczkowej zewnątrz wszelkich wątpliwości; znalezione wypadki, stosując się równie dobrze do przypuszczenia ciągłości materyi jak i jej nieciągłości, obejmują oczywiście wszystkie możliwe sposoby budowy ciał naturalnych, a z tego powodu są najogólniejszemi i prawdziwemi na zawsze. W ciągu niniejszego wykładu przyjmiemy ciągłość materyi, ażeby nie oddalać się zbytecznie od mechaniki analitycznej, w miejscach jednak gdzie tego zajdzie potrzeba, nie omieszkamy usprawiedliwić tych samych wypadków w przypuszczeniu nieciągłości materyi.

LEKCYA IV

Warunki równowagi ciała niesztywnego. — Formuły pomocnicze. — Własności pracy mechanicznej jednostki elementu.

17. Warunki równowagi ciała niesztywnego. — Do tego czasu zajmowaliśmy się tylko sformułowaniem i rozwiązaniem głównego zadania mechaniki cząsteczkowej. Opierając się na dwóch możliwych i najogólniejszych przypuszczeniach o budowie materyi, otrzymaliśmy równania (3), (4), (5), (6) [III, **12**, **14**], stanowiące ostateczne wyniki tego zadania, wspólne wszystkim szczególnym przypadkom. Z pomiędzy tych wyników, równania (5) [**12**], wyrażające warunki ruchu lub równowagi na powierzchni ciała, określają także ciśnienie na jednostkę płaskiego elementu w danym punkcie, dowodząc, że wielkość jego i kierunek zależą od współrzędnych tego punktu i od dostaw kątów które normalna do elementu tworzy z osiami współrzędnych. Definicya ta podawana w traktatach o *Teoryi Sprężystości*, o *Hydrostatyce* i *Hydrodynamice* i t. d. a priori, jest tutaj naturalnym wynikiem. Porównywając równania (4) i (5) [**12**] dostrzega się od razu oczywistą różnicę pomiędzy ciśnieniem na punkt a ciśnieniem na element płaski w danym punkcie. Różnica ta, łatwa obecnie do pojęcia, stanowi jedną z największych trudności dla początkującego, gdy się ciśnienie na element płaski definiuje a priori. Te same równania (5) dają także twier-

dzenie o wzajemności ciśnień odpowiadających dwom elementom płaskim w danym punkcie, twierdzenie którem zakończyliśmy ustęp [**12**].

Podwójna rola równań (5) [**12**] pozwala się spodziewać w ogóle, że przez stosowne przerobienie wypadków (3), (4), (5), (6) [**12, 14**] można będzie otrzymać inne, nie nowe, ale nowego kształtu, który ułatwi a nawet doprowadzi do sformułowania pewnych zasad, streszczających w sposób łatwy i jasny wszystkie ogólne prawa, dotyczące odkształcania się ciał niesztywnych. Zasady te ułatwią także nieraz sformułowanie a nawet i rozwiązanie wielu zadań mechaniki cząsteczkowej, podobnie jak zasady, *sił żywych*, *najmniejszego działania*, *zachowania środka ciężkości*, *zachowania pól* i t. d., ułatwiają rozwiązanie wielu zadań mechaniki analitycznej.

Przenieśmy drugie strony $\left(\rho\frac{d^2u}{dt^2},\ \rho\frac{d^2v}{dt^2},\ \rho\frac{d^2w}{dt^2}\right)$ równań (4) [**12**] na strony ich pierwsze, i zastąpmy nawiasy

$$\left(X_0-\frac{d^2u}{dx^2}\right)\quad\left(Y_0-\frac{d^2v}{dx^2}\right)\quad\left(Z_0-\frac{d^2w}{dx^2}\right)$$

głoskami X_0, Y_0, Z_0, rozumiejąc przez nie składowe sił działających na massę, rachując w to i siły bezwładności. W ten sposób równania (4) [**12**] przyjmą kształt równań (6) [**14**],

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X_0=0,\\&\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_1}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y_0=0,\\&\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z_0=0,\end{aligned}\right.$$

i główne zadanie mechaniki cząsteczkowej sprowadzi się do

równań (1) w każdym punkie ciała, i do równań (5) [**12**],

$$(2) \quad \begin{cases} mN_1 + nT_3 + pT_2 - X = 0, \\ mT_3 + nN_2 + pT_1 - Y = 0, \\ mT_2 + nT_1 + pN_3 - Z = 0, \end{cases}$$

na jego powierzchni, t. j. do przypadku równowagi, zmyślonej w razie ruchu, prawdziwej w razie spoczynku, według zasady D'Alemberte'a. Cel jakiśmy sobie założyli, wymaga tego uproszczenia, które, jak z resztą wiadomo, nie zmniejsza wcale ogólności.

Sześć równań (1) i (2) wyrażają warunki równowagi w całej przestrzeni uważanego ciała. Proponujemy je zastąpić innemi, które doprowadzą do pewnego twierdzenia, charakteryzującego wybitnie ciało niesztywne względem ciała sztywnego.

Pomnożmy pierwsze z równań (1) przez $dxdydz$ i z całkujmy go w całej przestrzeni ω,

$$(3) \quad \begin{cases} \int\int\int \frac{dN_1}{dx} dxdydz + \int\int\int \frac{dT_3}{dy} dxdydz \\ + \int\int\int \frac{dN_2}{dx} dxdydz + \int\int\int \rho X_0 dxdydz = 0, \end{cases}$$

W pierwszej z całek (3) można wykonać całkowanie względem x, co daje

$$\int\int\int \frac{dN_1}{dx} dxdydz = \int\int (N''_1 - N'_1) dydz,$$

rozumiejąc przez N'_1, N''_1 wartości funkcyi N_1 przypadające w dwóch punktach powierzchni ω, w których ją prosta równoległa do osi x spotyka. Jeżeli $(d\omega)'$ i $(d\omega)''$ oznaczają elementa powierzchni ω w tych punktach, a m' i m'' dostawy kątów

które normalne zewnętrzne, w nich do powierzchni ω poprowadzone, tworzą z osią x, jest oczywiście

$$dydz = m''(d\omega)'' = -m'(dw)',$$

i całka podwójna zamienia się na pojedyńczą,

$$\int\int (N''_1 - N'_1) dy\, dz = \int m N_1 dw,$$

rozciągnioną na całą powierzchnię ω. Do podobnych wypadków dojdziemy także, całkując drugą z całek (3) względem y, trzecią względem z i wprowadzając dostawy (n, p) kątów, które normalna zewnętrzna do powierzchni ω tworzy z osiami y i z. W ten sposób równanie (3) staje się pierwszém z równań

$$\int (mN_1 + nT_3 + pT_2) d\omega + \int\int\int \rho X_0 dxdydz = 0,$$

$$\int (mT_2 + nN_2 + pT_1) d\omega + \int\int\int \rho Y_0 dxdydz = 0,$$

$$\int (mT_2 + nT_1 + pN_3) d\omega + \int\int\int \rho Z_0 dxdydz = 0,$$

z których dwa drugie otrzymują się wykonywając te same działania na dwóch ostatnich równaniach (1). Z przyczyny związków (2), nawiasy pod całkami pojedyńczemi są składowemi X, Y, Z, ciśnienia wywieranego na jednostkę elementu $d\omega$; zastępując je temi składowemi znajdujemy:

$$(4) \quad \begin{cases} \int X d\omega + \int\int\int \rho X_0 dxdydz = 0, \\ \int Y d\omega + \int\int\int \rho Y_0 dxdydz = 0, \\ \int Z d\omega + \int\int\int \rho Z_0 dxdydz = 0, \end{cases}$$

równania wyrażające, że summy składowych sił działających na ciało ω są same przez się zerami.

Jeżeli teraz od drugiego z równań (1) pomnożonego przez z odejmiemy trzecie pomnożone przez y,

$$\frac{d(zT_3 - yT_2)}{dx} + \frac{d(zN_2 - yT_1)}{dy} + \frac{d(zT_1 - yN_3)}{dz} + \rho(zY_0 - yZ_0) = 0,$$

i na tak otrzymaném równaniu wykonamy to samo działanie, jakie wykonaliśmy na każdém z trzech równań (1), znajdziemy oczywiście

$$\int [m(zT_3 - yT_2) + n(zN_2 - yT_1) + p(zT_1 - yN_3)]\, d\omega$$
$$+ \int\int\int \rho(zY_0 - yZ_0)\, dxdydz = 0,$$

lub porządkując podług z i y

$$\int [z(mT_3 + nN_2 + pT_1) - y(mT_2 + nT_1 + pN_3)]\, d\omega$$
$$+ \int\int\int \rho(zY_0 - yZ_0)\, dxdydz = 0.$$

To daje tożsamościowo, pamiętając na związki (2) i powtarzając podobne działania z pozostałemi parami równań (1),

$$(5) \begin{cases} \int (zY - yZ)\, d\omega + \int\int\int \rho(zY_0 - Z_0)\, dxdydz = 0, \\ \int (xZ - zX)\, d\omega + \int\int\int \rho(xZ_0 - zX_0)\, dxdydz = 0, \\ \int (yX - xY)\, d\omega + \int\int\int \rho(yX_0 - xY_0)\, dxdydz = 0, \end{cases}$$

równania wyrażające, że summy momentów sił działających na ciało ω są same przez się zerami.

Całkowanie któreśmy wykonywali w całej przestrzeni ciała, można wykonać również w pewnej jego części, bez naruszenia charakteru równań (4) i (5). Trzeba jednakowoż pamiętać, że w tym drugim przypadku składowe X, Y, Z, oznaczają ciśnienia na powierzchnię ograniczającą część uważaną, wynikające z prawa według którego ciało się odkształca, a nie ciśnienia dane na powierzchni ciała, jak to ma miejsce w tym razie, kiedy całkowanie rozciąga się do całej jego przestrzeni. Ztąd mamy następujące twierdzenie: *ażeby w całej przestrzeni* ω *ciała niesztywnego istniała równowaga, siły działające na massę każdej jego części powinny się równoważyć z ciśnieniami wywieranemi na jej powierzchnią, w ten sam sposób, jakby się równoważyły gdyby ta część była sztywną.* Ponieważ w razie sztywności materyi, równania (4) i (5) mają także miejsce chociażby ona była nieciągłą, oczywistém jest, że sformułowane teraz twierdzenie stosuje się także i wtenczas, jeżeli uważamy ciało za systemat cząsteczek; należy tylko w równaniach (4) i (5) zastąpić znaki całkowania $\int$ przez znaki summowania Σ, elementa płaskie i nieskończenie małe $d\omega$ przez elementa skończone $\Delta\omega$, elementa zaś nieskończenie małe $dxdydz$ przez elementa skończone ΔV.

Podobieństwo równań (4) i (5) do warunków równowagi ciała sztywnego mogłoby zrodzić mniemanie, że warunki równowagi w ciele naturalném niczém się nie różnią od tychże warunków ciała sztywnego. Tak jednak nie jest. Jeżeliby bowiem uważane ciało ω było rzeczywiście sztywném, równania (4) i (5) rozciągnione do całej jego przestrzeni, stanowiłyby, znane z mechaniki, warunki równowagi konieczne i dostateczne; gdy tymczasem te same równania (4) i (5), wtenczas tylko wyrażają warunki równowagi w ciele niesztywném, jeżeli się stosują do każdej jego części.

Ażeby lepiej jeszcze objaśnić wyłożone teraz twierdzenie,

weźmy za przykład drążek prosty i sztywny na którego obydwa końce działają pewne siły w kierunku jego długości. Drążek ten zostaje w równowadze jeżeli pomienione siły są równe i znaków przeciwnych. Lecz jeżeli drążek jest niesztywnym, jeżeli on jest np. z kauczuku, oba powyższe warunki nie dają jeszsze równowagi, ale przeciwnie, drążek pocznie się wydłużać lub skracać, stosownie do tego czy siły do końców jego przyczepione działają od siebie czy działają ku sobie, i ruch ten trwać będzie dotąd, dopóki ciśnienia, w skutek niego powstałe, na przecięcia normalne do długości drążka, nie staną się równemi siłom na końce jego działającym; wtenczas bowiem tylko twierdzenie wyżej dowiedzione będzie mogło mieć miejsce.

Twierdzenie o równowadze ciała niesztywnego stanowi zasadę, którą biorą zwykle za prawdę oczywistą i robią z niej punkt wyjścia w rozmaitych specyalnych częściach mechaniki cząsteczkowej. My zdania tego nie podzielamy. Jakkolwiek twierdzenie to jest dosyć łatwém do dowiedzenia, nikt wszakże zaprzeczyć nie może, że jest bardzo trudném do pojęcia, podobnie jak wiele innych kwestyj mechanicznych. Stawianie niejasnych zasad na początku nauki prowadzi zawsze do tego, że dopiero po głębokich jej studyach przychodzi się do ich zrozumienia, co jest niezgodne z celem pedagogicznym, jaki się w każdym wykładzie zakłada. Każda nauka powinna się rozpoczynać od zasad jasnych i popularnych : nasz wybór padł na *pojęcie pracy mechanicznej*. Najpierwsze fundamenta fizyki doświadczalnej i mechaniki ogólnej zawierają już w sobie tyle materyału, że każdy, z elementami umiejętności tych obznajmiony, posiada go dosyć na dostateczne sfamiliaryzowanie się z pojęciem pracy mechanicznej. Pojęcie to należy niezawodnie do najłatwiejszych i spotyka tyle przypadków w naturze, że jest również i najpopularniejszém. Zdaje mi się, że objaśniłem dostatecznie powody które mię skłoniły do wzięcia

za punkt wyjścia, określenia pracy mechanicznej jednostki elementu $dxdydz$. Krok ten zresztą niepowinien być uważany za niewłaściwy choćby tylko dlatego, że pojęcie to dobiło się już prawa pierwszeństwa we wszystkich prawie umiejętnościach fizyko-matematycznych.

18. Formuły pomocnicze. — Widzieliśmy już że funkcya P (7) [II, **8**], praca mechaniczna jednostki elementu $dxdydz$, zależy, na mocy twierdzenia w równaniu (3) [**12**] zawartego, od sześciu ilości $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$. Chcemy dowieść teraz, że wartość i kształt tej funkcyi nie zależą od położenia układu współrzędnych, co się wyraża krótko, że funkcya P jest *niezmiennikiem*. Przed dowiedzeniem jednak tej własności wypada się zapoznać z pewnemi formułami, które będą również użytecznemi i w innych jeszcze okolicznościach.

Niech będą, zachowując ten sam początek (x', y', z') nowe współrzędne prostokątne punktu M; i oznaczmy jak wskazuje tablica

(6)

	x'	y'	z'	
x	m_1	m_2	m_3	u
y	n_1	n_2	n_3	v
z	p_1	p_2	p_3	w
	u'	v'	w'	

przez (m_i, n_i, p_i) dostawy kątów które nowe osie tworzą z danemi, a przez (u', v', w') nowe rzuty odległości punktu $M'(x+u,\ y+v,\ z+w)$ od punktu $M(x, y, z)$. Wiadomo że pomiędzy dziewięcioma dostawami (m_i, n_i, p_i) zachodzą związki

$$
(7)\quad \begin{cases}
m^2_1 + n^2_1 + p^2_1 = 1, \\
m^2_2 + n^2_2 + p^2_2 = 1, \\
m^2_3 + n^2_3 + p^2_3 = 1, \\
m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 = 0, \\
m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 = 0, \\
m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0;
\end{cases}
$$

albo

$$
(8)\quad \begin{cases}
m^2_1 + m^2_2 + m^2_3 = 1, \\
n^2_1 + n^2_2 + n^2_3 = 1, \\
p^2_1 + p^2_2 + p^2_3 = 1, \\
n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = 0, \\
p_1 m_1 + p_2 m_2 + p_3 m_3 = 0, \\
m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0;
\end{cases}
$$

albo

$$
(9)\quad \begin{cases}
m_1 = \frac{1}{k}(n_2 p_3 - n_3 p_2), \quad n_1 = \frac{1}{k}(p_2 m_3 - p_3 m_2), \quad p_1 = \frac{1}{k}(m_2 n_3 - m_3 n_2), \\
m_2 = \frac{1}{k}(n_3 p_1 - n_1 p_3), \quad n_2 = \frac{1}{k}(p_3 m_1 - p_1 m_3), \quad p_2 = \frac{1}{k}(m_3 n_1 - m_1 n_3), \\
m_3 = \frac{1}{k}(n_1 p_2 - n_2 p_1), \quad n_3 = \frac{1}{k}(p_1 m_2 - p_2 m_1), \quad p_3 = \frac{1}{k}(m_1 n_2 - m_2 n_1),
\end{cases}
$$

Formuły (9), mniej częstego użycia jak równania (7) i (8), otrzymać bardzo łatwo można rozwiązując układ liniowy (10) względem x, y, z i

gdzie

$$k = m_1(n_2p_3 - n_3p_2) + n_1(p_2m_3 - p_3m_2) + p_1(m_2n_3 - m_3n_2),$$

jest zawsze pierwiastkiem równania $k^2 = 1$.

Tablica (6) prowadzi, za pomocą metody rzutów, do formuł

$$(10)\qquad \begin{cases} x' = m_1x + n_1y + p_1z, \\ y' = m_2x + n_2y + p_2z, \\ z' = m_2x + n_3y + p_3z; \end{cases}$$

$$(11)\qquad \begin{cases} u = m_1u' + m_2v' + m_3w', \\ v = n_1u' + n_2v' + n_3w', \\ w = p_1u' + p_2v' + p_3w', \end{cases}$$

które dają (x', y', z') w (x, y, z) i (u, v, w) w (u', v', w'). Znajduje

---

porównywając znalezione w ten sposób wypadki z ilościami x, y, z, otrzymanemi z tablicy (6) za pomocą metody rzutów.

Ażeby zaś dowieść że ilość k jest pierwiastkiem równania $k^2 = 1$, podstawmy pierwszy szereg wartości (9) w pierwsze z równań (7). Podstawienie to daje

$$k^2 = (n_2p_3 - n_3p_2)^2 + (p_2m_3 - p_3m_2)^2 + (m_2n_3 - m_3n_2)^2,$$

a z przyczyny tożsamości

$$(n_2p_3 - n_3p_2)^2 + (p_2m_3 - p_3m_2)^2 + (m_2n_3 - m_3n_2)^2$$
$$= (m_2^2 + n_2^2 + p_2^2)(m_3^2 + n_3^2 + p_3^2) - (m_2m_3 + n_2n_3 + p_2p_3)^2$$

i trzech następujących po sobie, począwszy od drugiego, równań (7), jest oczywiście $k^2 = 1$.

się więc pochodne $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ w funkcyi nowych pochodnych $\frac{d(u', v', w')}{d(x', y', z')}$, różniczkując (u, v, w) jako funkcye (11) ilości (u', v', w') zależnych od zmiennych (x', y', z'), które są funkcyami (10) ilości (x, y, z). To daje najpierw formuły symboliczne

$$\frac{du}{dx} = (m_1 du' + m_2 dv' + m_3 dw')\left(\frac{m_1}{dx'} + \frac{m_2}{dy'} + \frac{m_3}{dz'}\right),$$

$$\frac{du}{dy} = (m_1 du' + m_2 dv' + m_3 dw')\left(\frac{n_1}{dx'} + \frac{n_2}{dy'} + \frac{n_3}{dz'}\right),$$

$$\frac{du}{dz} = (m_1 du' + m_2 dv' + m_3 dw')\left(\frac{p_1}{dx'} + \frac{p_2}{dy'} + \frac{p_3}{dz'}\right),$$

$$\frac{dv}{dx} = (n_1 du' + n_2 dv' + n_3 dw')\left(\frac{m_1}{dx'} + \frac{m_2}{dy'} + \frac{m_3}{dz'}\right),$$

$$\frac{dv}{dy} = (n_1 du' + n_2 dv' + n_3 dw')\left(\frac{n_1}{dx'} + \frac{n_2}{dy'} + \frac{n_3}{dz'}\right),$$

$$\frac{dv}{dz} = (n_1 du' + n_2 dv_1 + n_3 dw')\left(\frac{p_1}{dx'} + \frac{p_2}{dy'} + \frac{p_3}{dz'}\right),$$

$$\frac{dw}{dx} = (p_1 du' + p_2 dv' + p_3 dw')\left(\frac{m_1}{dx'} + \frac{m_2}{dy'} + \frac{m_3}{dz'}\right),$$

$$\frac{dw}{dy} = (p_1 du' + p_2 dv' + p_3 dw')\left(\frac{n_1}{dx'} + \frac{n_2}{dy'} + \frac{n_3}{dz'}\right),$$

$$\frac{dw}{dz} = (p_1 du' + p_2 dv' + p_3 dw')\left(\frac{p_1}{dx'} + \frac{p_2}{dy'} + \frac{p_3}{dz'}\right),$$

z których znajdujemy bardzo łatwo

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= m^2{}_1\frac{du'}{dx'} + m^2{}_2\frac{dv'}{dy'} + m^2{}_3\frac{dw'}{dz'} + m_2 m_3\left(\frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'}\right) \\
&\quad + m_3 m_1\left(\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'}\right) + m_1 m_2\left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right), \\
\frac{dv}{dy} &= n^2{}_1\frac{du'}{dx'} + n^2{}_2\frac{dv'}{dy'} + n^2{}_3\frac{dw'}{dz'} + n_2 n_3\left(\frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'}\right) \\
&\quad + n_3 n_1\left(\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'}\right) + n_1 n_2\left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right), \\
\frac{dw}{dz} &= p^2{}_1\frac{du'}{dx'} + p^2{}_2\frac{dv'}{dy'} + p^2{}_3\frac{dw'}{dz'} + p_2 p_3\left(\frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'}\right) \\
&\quad + p_3 p_1\left(\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'}\right) + p_1 p_2\left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right), \\
\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} &= 2n_1 p_1\frac{du'}{dx'} + (n_2 p_3 + n_3 p_2)\left(\frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'}\right) \\
&\quad + 2n_2 p_2\frac{dv'}{dy'} + (n_3 p_1 + n_1 p_3)\left(\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'}\right) \\
&\quad + 2n_3 p_3\frac{dw'}{dz'} + (n_1 p_2 + n_2 p_1)\left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right), \\
\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} &= 2p_1 m_1\frac{du'}{dx'} + (p_2 m_3 + p_3 m_2)\left(\frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'}\right) \\
&\quad + 2p_2 m_2\frac{dv'}{dy'} + (p_3 m_1 + p_1 m_3)\left(\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'}\right) \\
&\quad + 2p_3 m_3\frac{dw'}{dz'} + (p_1 m_2 + p_2 m_1)\left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right), \\
\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} &= 2m_1 n_1\frac{du'}{dx'} + (m_2 n_3 + m_3 n_2)\left(\frac{dv'}{dz'} + \frac{dw'}{dy'}\right) \\
&\quad + 2m_2 n_2\frac{dv'}{dy'} + (m_3 n_1 + m_1 n_3)\left(\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'}\right) \\
&\quad + 2m_3 n_3\frac{dw'}{dz'} + (m_1 n_2 + m_2 n_1)\left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Uważmy teraz że (N_i, T_i) tablicy (13) są składowemi, według dawnych osi (x, y, z), ciśnień wywieranych w punkcie M na

elementa płaskie prostopadłe do tychże osi; w ten sam sposób ilości (N'_i, T'_i) tablicy (14)

$$(13)\quad \begin{array}{c|c|c|c|} & x & y & z \\ \hline x & N_1 & T_3 & T_2 \\ \hline y & T_3 & N_2 & T_1 \\ \hline z & T_2 & T_1 & N_3 \\ \hline \end{array} \qquad (14)\quad \begin{array}{c|c|c|c|} & x' & y' & z' \\ \hline x' & N'_1 & T'_3 & T'_2 \\ \hline y' & T'_3 & N'_2 & T'_1 \\ \hline z' & T'_2 & T'_1 & N'_3 \\ \hline \end{array}$$

są składowemi, według nowych osi (x', y', z'), ciśnień wywieranych w tym samym punkcie M na elementa płaskie prostopadłe do x', y', z'. Kombinując każdy element płaski układu nowego z każdym elementem płaskim układu dawnego, zastosujmy twierdzenie zawarte w równaniach (5) [12]. To prowadzi łatwo do trzech grup równań

$$\begin{cases} m_1 N'_1 + m_2 T'_3 + m_3 T'_2 = m_1 N_1 + n_1 T_3 + p_1 T_2, \\ n_1 N'_1 + n_2 T'_3 + n_3 T'_2 = m_1 T_3 + n_1 N_2 + p_1 T_1, \\ p_1 N'_1 + p_2 T'_3 + p_3 T'_2 = m_1 T_2 + n_1 T_1 + p_1 N_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 T'_3 + m_2 N'_2 + m_3 T'_1 = m_2 N_1 + n_2 T_3 + p_2 T_2, \\ n_1 T'_3 + n_2 N'_2 + n_3 T'_1 = m_2 T_3 + n_2 N_2 + p_2 T_1, \\ p_1 T'_3 + p_2 N'_2 + p_3 T'_1 = m_2 T_2 + n_2 T_1 + p_2 N_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 T'_2 + m_2 T'_1 + m_3 N'_3 = m_3 N_1 + n_3 T_3 + p_3 T_2, \\ n_1 T'_2 + n_2 T'_1 + n_3 N'_3 = m_3 T_3 + n_3 N_2 + p_3 T_1, \\ p_1 T'_2 + p_2 T'_1 + p_3 N'_3 = m_3 T_2 + n_3 T_1 + p_3 N_3, \end{cases}$$

z których można otrzymać wartości funkcyj (N'_i, T'_i) za pomocą

(N_i, T_i), dodając trzy równania każdej grupy, pomnożone poprzednio, pierwsze przez m_i, drugie przez n_i, trzecie przez p_i, gdzie wskazówka i jest kolejno $1, 2, 3$; mając wzgląd na związki (7), znajdujemy

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
N'_1 &= m_1^2 N_1 + n_1^2 N_2 + p_1^2 N_3 + 2 n_1 p_1 T_1 + 2 p_1 m_1 T_2 + 2 m_1 n_1 T_3, \\
N'_2 &= m_2^2 N_1 + n_2^2 N_2 + p_2^2 N_3 + 2 n_2 p_2 T_1 + 2 p_2 m_2 T_2 + 2 m_2 n_2 T_3, \\
N'_2 &= m_3^2 N_1 + n_3^2 N_2 + p_3^2 N_3 + 2 n_3 p_3 T_1 + 2 p_3 m_3 T_2 + 2 m_3 n_3 T_3, \\
T'_1 &= m_2 m_3 N_1 + n_2 n_3 N_2 + p_2 p_3 N_3 + (n_2 p_3 + n_3 p_2) T_1 \\
&\quad + (p_2 m_3 + p_3 m_2) T_2 + (m_2 n_3 + m_3 n_2) T_3, \\
T'_2 &= m_3 m_1 N_1 + n_3 n_1 N_2 + p_3 p_1 N_3 + (n_3 p_1 + n_1 p_3) T_1 \\
&\quad + (p_3 m_1 + p_1 m_3) T_2 + (m_3 n_1 + m_1 n_3) T_3, \\
T'_3 &= m_1 m_2 N_1 + n_1 n_2 N_2 + p_1 p_2 N_3 + (n_1 p_2 + n_2 p_1) T_1 \\
&\quad + (p_1 m_2 + p_2 m_1) T_2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1) T_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Poprzestajemy tymczasem na formułach (12) i (15), których wymaga cel na początku tego ustępu założony, odkładając dalsze ich rozwinięcia na później, gdzie zajdzie tego potrzeba, w ustępach podobnie zatytułowanych.

19. Własności pracy mechanicznej jednostki elementu. — Powracając do założenia któreśmy na początku poprzedzającego ustępu zrobili, przypominamy równanie (3) [**12**],

$$
(16)\qquad \delta P = \left\{
\begin{aligned}
& N_1 \delta \frac{du}{dx} + T_1 \delta \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\
& + N_2 \delta \frac{dv}{dy} + T_2 \delta \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \\
& + N_3 \delta \frac{dw}{dz} + T_3 \delta \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)
\end{aligned}
\right\},
$$

pokazujące że praca mechaniczna P jednostki elementu $dxdydz$, jest funkcyą sześciu tylko ilości

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dy}, \quad \frac{dw}{dz}, \quad \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}, \quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}, \quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx},$$

i własność ta nie zależy oczywiście od położenia układu współrzędnych, albowiem dowodząc jej położenia tego wcaleśmy nie ustalali.

Oznaczywszy przez P′ wartość pracy mechanicznej, w tym samym punkcie M, jednostki elementu $dx'dy'dz'$ odpowiedniego nowemu układowi (x', y', z') mamy na mocy przypomnionego teraz twierdzenia

$$\delta P' = \left\{ \begin{array}{l} N'_1\delta\dfrac{du'}{dx'} + T'_1\delta\left(\dfrac{dv'}{dz'}+\dfrac{dw'}{dy'}\right) \\ + N'_2\delta\dfrac{dv'}{dy'} + T'_2\delta\left(\dfrac{dw'}{dx'}+\dfrac{du'}{dz'}\right) \\ + N'_3\delta\dfrac{dw'}{dz'} + T'_3\delta\left(\dfrac{du'}{dy'}+\dfrac{dv'}{dx'}\right) \end{array} \right\}$$

Lecz drugą stronę tego równania otrzymać także można z drugiej strony równania (16), zastępując sześć ilości $\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$ drugiemi stronami równań (12) [**18**], i porządkując w ten sposób otrzymany wypadek podług sześciu ilości $\delta\left\{\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\right\}$; dostawy bowiem (m_i, n_i, p_i) nie podlegają różniczkowaniu δ jako ilości stałe, a współczynniki sześciu wyrazów $\delta\left\{\dfrac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\right\}$ są wartościami (N'_i, T'_i) na mocy równań (15). Ztąd wypada równość

$$\delta P = \delta P',$$

która dowodzi, że wartość przyrostu δP od położenia układu współrzędnych nie zależy.

Niezależność kształtu funkcyi P od położenia układu współrzędnych, dowiedziona w twierdzeniu (16), i znaleziona teraz własność przyrostu jej δP, są wystarczającemi ażeby wnieść w ogóle, że kształt i wartość funkcyi P nie zależą od położenia układu współrzędnych, czyli, *że funkcya* P *jest niezmiennikiem.*

Summując wszystkie znane dotąd własności funkcyi P można sformułować następujące twierdzenie: *funkcya* P, *praca mechaniczna w punkcie* M *jednostki elementu* $dxdydz$, *jest niezmiennikiem sześciu ilości* $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, *a pochodne jej cząstkowe względem tych sześciu ilości są składowemi* (N_i, T_i), *według osi współrzędnych* (x, y, z), *ciśnień wywieranych w punkcie* M *na jednostki elementów płaskich do tychże osi prostopadłych.*

LEKCYA V

Elipsoida cisnień. — Dopełnienie twierdzenia o funkcyi P. — Cisnienia główne. — Płaszczyzny odpowiednie cisnieniom głównym. — Przypadek dwóch cisnień głównych. — Przypadek jednego cisnienia głównego. — Ogólne uwagi.

20. Elipsoida ciśnień. — Twierdzeniu zawartemu w równaniach (5) [III, **12**],

$$(1)\qquad \begin{cases} mN_1 + nT_3 + pT_2 = X, \\ mT_3 + nN_2 + pT_1 = Y, \\ mT_2 + nT_1 + pN_3 = Z, \end{cases}$$

można jeszcze nadać inną postać, z przyczyny związku

$$(2)\qquad m^2 + n^2 + p^2 = 1,$$

który zachodzi zawsze pomiędzy dostawami (m, n, p) kątów tego samego kierunku z trzema prostemi do siebie prostopadłemi. Wnioski z własności tej wynikające mają stanowić przedmiot niniejszej lekcyi, którą uważać także można jako dopełnienie nauki o funkcyi P, w końcu [**19**] poprzedzającej lekcyi rozpoczętej. Widzieliśmy tam że wartość funkcyi P w punkcie M jest niezmiennikiem, t. j. odniesiona do układu współrzędnych ruchomego około stałego początku, zachowuje ten sam kształt i wielkość, w każdém jego położeniu.

Pozostają do zbadania własności jej pochodnych (N_i, T_i) w tém samém założeniu, lub mówiąc jaśniej, prawo podług którego zmieniają się ich wartości w punkcie M, odnoszące się do układu współrzędnych ruchomego około początku. Prawo to zawarte jest w równaniach (15) [IV, **18**], za pomocą których otrzymują się wartości funkcyj (N'_i, T'_i) w punkcie M odpowiadające układowi nowemu (x', y', z'), jeżeli znane są wartości ich (N_i, T_i) odpowiadające układowi dawnemu (x, y, z), z którym układ nowy ma wspólny początek. Lecz równania (15) [**18**] posiadają kształt niedogodny do celu jakiśmy założyli, powracamy zatém do ich źródła, t. j. równań (1), z których na mocy związku (2) łatwiej go osiągnąć będzie można.

Rozwiążmy równania (1), względem ilości m, n, p i podstawmy znalezione ich wartości w równanie (2). Założywszy dla krótkości

$$n_1 = T^2_1 - N_2N_3, \qquad t_1 = N_1T_1 - T_2T_3.$$

$$n_2 = T^2_2 - N_3N_1, \qquad t_2 = N_2T_2 - T_3T_1,$$

$$n_3 = T^2_3 - N_1N_2, \qquad t_3 = N_3T_3 - T_1T_2,$$

$$\varphi = N_1N_2N_3 + 2T_1T_2T_3 - (N_1T^2_1 + N_2T^2_2 + N_3T^2_3),$$

mamy rozwiązując równania (1)

$$(3)\quad \begin{cases} m = -\dfrac{1}{\varphi}(n_1X + t_3Y + t_2Z), \\[2ex] n = -\dfrac{1}{\varphi}(t_3X + n_2Y + t_1Z), \\[2ex] p = -\dfrac{1}{\varphi}(t_2X + t_1Y + n_3Z), \end{cases}$$

a podstawiając otrzymane wartości $(m, n, p,)$ w równanie (2),

znajdujemy

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(n_1^2+t_3^2+t_2^2)X^2+2[t_1(n_2+n_3)+t_2t_3]YZ\\ &+(t_3^2+n_2^2+t_1^2)Y^2+2[t_2(n_3+n_1)+t_3t_1]ZX\\ &+(t_2^2+t_1^2+n_3^2)Z^2+2[t_3(n_1+n_2)+t_1t_2]XY \end{aligned}\right\}=\varphi^2.$$

Poprowadźmy przez punkt M, do którego odnoszą się równania (1), trzy proste równoległe do osi współrzędnych i uważajmy ilości X, Y, Z, dane przez pierwsze strony równań (1), za rzuty, na te proste, odcinka MN linii prostej wychodzącej z punktu M i przedstawiającej kierunek i wielkość ciśnienia w tym punkcie wywieranego, na jednostkę płaskiego elementu, którego normalna tworzy z osiami współrzędnych kąty mające za dostawy m, n, p. Współrzędne końca N pomienionego odcinka MN zadosyć czynią równaniu (4), a zatem, *miejscem końców* N *linij prostych* MN *wychodzących z punktu* M *i przedstawiających kierunki i wielkości ciśnień na elementa płaskie w tym punkcie wywieranych*, *jest powierzchnia drugiego stopnia* (4), *elipsoida*, *którą nazwiemy elipsoidą ciśnień*.

21. Dopełnienie twierdzenia o funkcyi P. — Równaniu elipsoidy ciśnień można nadać kształt dogodniejszy do badania jej własności. Przedmiot ten czerpiemy z *czwartej lekcyi Teoryi Sprężystości* G. Lamé'go. Oznaczmy przez x, y, z współrzędne tego samego końca N, odniesione do osi pochyłych, według ciśnień wywieranych w punkcie M na elementa płaskie prostopadłe do osi współrzędnych dawnych, ciśnień, które oznaczamy przez F_1, F_2, F_3 i których składowemi są odpowiednio N_1, T_3, T_2; T_3, N_2, T_1; T_2, T_1, N_3. Nowe osie pochyłe tworzą z dawnemi prostokątnemi kąty, mające za dostawy wartości oznaczone za pomocą tablicy

$$
(5)\qquad
\begin{array}{c|c|c|c}
X & Y & Z & \\
\hline
\frac{N_1}{F_1} & \frac{T_3}{F_1} & \frac{T_2}{F_1} & x \\
\hline
\frac{T_3}{F_2} & \frac{N_2}{F_2} & \frac{T_1}{F_2} & y \\
\hline
\frac{T_2}{F_3} & \frac{T_1}{F_3} & \frac{N_3}{F_3} & z \\
\hline
\end{array}
$$

która prowadzi bezpośrednio do formuł następujących :

$$
(6)\qquad
\begin{cases}
\frac{N_1}{F_1}x + \frac{T_3}{F_2}y + \frac{T_2}{F_3}z = X, \\
\frac{T_3}{F_1}x + \frac{N_2}{F_2}y + \frac{T_1}{F_3}z = Y, \\
\frac{T_2}{F_1}x + \frac{T_1}{F_2}y + \frac{N_3}{F_3}z = Z.
\end{cases}
$$

Porównanie dwóch grup (1) i (6) daje związki

$$
(7)\qquad m = \frac{x}{F_1}, \quad n = \frac{y}{F_2}, \quad p = \frac{z}{F_3};
$$

albowiem rozwiązując równania (1) względem m, n, p, a równania (6) względem $\frac{x}{F_1}, \frac{y}{F_2}, \frac{z}{F_3}$, otrzymalibyśmy oczywiście te same wartości, ponieważ obie grupy pierwszego stopnia mają te same współczynniki. Związki (7) dają, na mocy równania (2),

$$
(8)\qquad \left(\frac{x}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{F_2}\right) + \left(\frac{z}{F_3}\right)^2 = 1,
$$

równanie *elipsoidy ciśnień*, odniesionej do jej *średnic sprzężonych*. *Ciśnienia więc wywierane w punkcie* M *na jednostki trzech płaskich elementów do siebie prostopadłych, są średnicami sprzężonemi elipsoidy ciśnień.*

Własność ta pozwala dopełnić twierdzenie o funkcyi P [IV, **19**] w sposób następujący: *funkcya* P, *praca mechaniczna jednostki elementu dxdydz, jest niezmiennikiem sześciu ilości* $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, *a pochodne jej cząstkowe* (N_i, T_i) *są rzutami, według trzech krawędzi tego elementu, średnic sprzężonych elipsoidy ciśnień trzem ścianom jego odpowiadających.*

22. Ciśnienia główne. — Pomiędzy wszystkiemi układami średnic sprzężonych, elipsoidy ciśnień, istnieje jedyny średnic do siebie prostopadłych, t. j. układ osi tej powierzchni drugiego stopnia. Przypuśćmy że płaszczyzny współrzędne pierwotne były przypadkowo wybrane w ten sposób, że elipsoida (8) znajduje się odniesioną do swoich osi; współrzędne x, y, z są w takim razie prostokątnemi podobnie jak współrzędne X, Y, Z, i dostawy tablicy (5) sprawdzają, pomiędzy innemi i jednocześnie, dwie grupy związków

$$(9)\quad \begin{cases} \left(\frac{N_1}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{T_3}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{T_2}{F_3}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{T_3}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{N_2}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{T_1}{F_3}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{T_2}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{T_1}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{N_3}{F_3}\right)^2 = 1, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \left(\frac{N_1}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{T_3}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{T_2}{F_1}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{T_3}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{N_2}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{T_1}{F_2}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{T_2}{F_3}\right)^2 + \left(\frac{T_1}{F_3}\right)^2 + \left(\frac{N_2}{F_3}\right)^2 = 1, \end{cases}$$

które dają przez wyrugowanie N_1, N_2, N_3,

$$(11)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{F_2^2}-\frac{1}{F_1^2}\right)T_3^2+\left(\frac{1}{F_3^2}-\frac{1}{F_1^2}\right)T_2^2=0, \\ \left(\frac{1}{F_3^2}-\frac{1}{F_2^2}\right)T_1^2+\left(\frac{1}{F_1^2}-\frac{1}{F_2^2}\right)T_3^2=0, \\ \left(\frac{1}{F_1^2}-\frac{1}{F_3^2}\right)T_2^2+\left(\frac{1}{F_2^2}-\frac{1}{F_3^2}\right)T_1^2=0. \end{cases}$$

Ilości F_1, F_2, F_3 są obecnie osiami elipsoidy, które przypuszczamy nierówne i uporządkowane podług ich rosnącej wielkosci; w tym przypadku ogólnym, pierwsze z równań (11) wymaga ażeby było $T_3=0$, $T_2=0$, dwa zaś pozostałe wymagają, ażebyśmy jeszcze mieli $T_1=0$. Wtenczas związki (10) dają

$$N_1=F_1, \quad N_2=F_2, \quad N_3=F_3,$$

a równania (6) sprowadzają się do

$$(12)\qquad X=x, \quad Y=y, \quad Z=z;$$

t. j. że osie elipsoidy zchodzą się z normalnemi do elementów płaskich na które wywierają się ciśnienia przedstawione przez te same osie. Tak więc, w każdym punkcie ciała znajdują się trzy elementa płaskie do siebie prostopadłe, na które wywierają się ciśnienia normalne. Płaszczyzny ich są przecięciami głównemi elipsoidy ciśnień, a trzy ciśnienia normale, które nazwiemy *ciśnieniami głównemi*, są przedstawione, w kierunku i wielkości, przez osie tej elipsoidy. Chodzi teraz o wyznaczanie, w każdym punkcie ciała, wielkości ciśnień głównych i położeń elementów płaskich, na które się wywierają.

Niech A oznacza wielkość nieznaną ciśnienia głównego wywierającego się w M, a m, n, p niech oznaczają dostawy kątów które jego kierunek, również nieznany, tworzy z osiami współrzędnych. Formuły (1) dają, po zastąpieniu w nich X

przez mA, Y przez nA, Z przez pA,

$$
(13) \quad \begin{cases} m(N_1 - A) + nT_3 + pT_2 = 0, \\ mT_3 + n(N_2 - A) + pT_1 = 0, \\ mT_2 + nT_1 + p(N_3 - A) = 0; \end{cases}
$$

posiadamy oprócz tego związek $m^2 + n^2 + p^2 = 1$, uzupełniający cztery równania konieczne, na wyznaczenie niewiadomych A, m, n, p. Wyrugowanie stosunków $\frac{m}{p}$ i $\frac{n}{p}$ z trzech równań (13) prowadzi do równania wypadkowego

$$
\begin{vmatrix} N_1 - A, & T_3, & T_2 \\ T_3, & N_2 - A, & T_1 \\ T_2, & T_1, & N_3 - A \end{vmatrix} = \begin{cases} (N_1 - A)(N_2 - A)(N_3 - A) \\ -(N_1 - A)T_1^2 - (N_2 - A)T_2^2 \\ -(N_3 - A)T_3^2 + 2T_1T_2T_3 = 0; \end{cases}
$$

albo, rozwijając i zmieniając znaki

$$
(14) \quad \begin{cases} A^3 - (N_1 + N_2 + N_3)A^2 \\ \quad + (N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2)A \\ \quad - (N_1N_2N_3 + 2T_1T_2T_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2) = 0 \end{cases}
$$

Równanie to trzeciego stopnia daje nietylko osie elipsoidy ciśnień, ale w tym samym czasie, daje wielkości i znaki ciśnień głównych : znak + wskazuje *wyciąganie*, znak — *ściskanie*.

Oznaczając trzy pierwiastki równania (14) przez A_1, A_2, A_3, mamy, na mocy znanych formuł z algebry

$$
(15) \quad \begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = N_1 + N_2 + N_3, \\ A_2A_3 + A_3A_1 + A_1A_2 = N_2N_3 + N_3N_2 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 + T_3^2, \\ A_1A_2A_3 = N_1N_2N_3 + T_1T_2T_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2. \end{cases}
$$

Z przyczyny że osie elipsoidy powinny pozostać te same, gdy się bierze N'_i, T'_i w miejsce N_i, T_i, mamy tożsamościowo

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
& N'_1 + N'_2 + N'_3 = N_1 + N_2 + N_3,\\
& N'_2N'_3 + N'_3N'_1 + N'_1N'_2 - T'^2_1 - T'^2_2 - T'^2_3\\
& \qquad = N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2,\\
& N'_1N'_2N'_3 + 2T'_1T'_2T'_3 - N'_1T'^2_2 - N'_2T'^2_2 - N'_3T'^2_3\\
& \qquad = N_1N_2N_3 + 2T_1T_2T_3 - N_1T_1^2 - N_2{}^2T_2^2 - N_3T_3^2,
\end{aligned}
\right.
$$

trzy związki symetryczne, które otrzymać także można, rugując dziewięć dostaw m_i, n_i, p_i z dwunastu równań (7) i (15) [IV, **18**].

Niech teraz A oznacza jeden z pierwiastków równania (14), t. j. w wielkości i znaku, jedno z ciśnień głównych w punkcie M. Ażeby znaleść jego kierunek, lub co na to samo wychodzi, położenie płaszczyzny na którą działa, potrzeba wrócić do równań (13), które dają łatwo

$$
T_2T_3m + T_3T\,n + T_1T_2p \left\{
\begin{aligned}
&= m[(A - N_1)T_1 + T_2T_3],\\
&= n[(A - N_2)T_2 + T_3T_1],\\
&= p[(A - N_3)T_3 + T_1T_2],
\end{aligned}
\right.
$$

co prowadzi do równania

$$
(17)\quad \frac{x' - x}{(A - N_1)T_1 + T_2T_3} + \frac{y' - y}{(A - N_2)T_2 + T_3T_1} + \frac{z' - z}{(A - N_3)T_3 + T_1T_2} = 0,
$$

przedstawiającego płaszczyznę szukaną : ilości x', y', z' oznaczają tutaj współrzędne bieżące płaszczyzny; ilości x, y, z współrzędne punktu M, od których A, N_i, T_i zależą.

23. Płaszczyzny odpowiednie ciśnieniom głównym. — Mając dane składowe (X, Y, Z), według osi współrzędnych, ciśnienia wywieranego na jednostkę płaskiego elementu w punkcie M, formuły (3) dają dostawy kątów które normalna tego elementu tworzy z osiami współrzędnych, t. j. wyznaczają jego położenie. Zadanie to, rozwiązane z innego punktu widzenia, prowadzi do pewnych wniosków, dających ogólne wyobrażenie o naturze ciśnień około punktu M.

Poznawszy wielkości, znaki i kierunki ciśnień głownych w punkcie M, przenieśmy początek do tego punktu i weźmy za osie współrzędnych same osie elipsoidy, jest wtedy

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+\frac{z^2}{A_3^2}=1. \tag{18}$$

Ponieważ ciśnienia wywierane na płaszczyzny współrzędnych są normalnemi, mamy oczywiście

$$N_1=A_1,\quad N_2=A_2,\quad N_3=A_3,\quad T_1=T_2=T_3=0,$$

i równania (1) dają

$$m=\frac{x}{A_1},\quad n=\frac{y}{A_2},\quad p=\frac{z}{A_3}, \tag{19}$$

t. j. dostawy kątów które tworzy z osiami nowemi normalna do elementu płaskiego ω, na który wywiera się ciśnienie przedstawione w wielkości i kierunku przez półśrednicę D, mającą za rzuty współrzędne jej końca (x, y, z). Podług tych wartości (19) płaszczyzna ω ma za równanie

$$\frac{xX}{A_1}+\frac{yY}{A_2}+\frac{zZ}{A_3}=0, \tag{20}$$

pokazujące, że jest równoległą do płaszczyzny stycznej do powierzchni

$$\frac{x^2}{A_1}+\frac{y^2}{A_2}+\frac{z^2}{A_3}=\pm k^2, \tag{21}$$

w punkcie w którym ją średnica D spotyka; k^2 jest ilością dodatną jakąkolwiek.

Jeżeli trzy pierwiastki (A_1, A_2, A_3) równania (14) są tego samego znaku, t. j. jeżeli one przedstawiają albo trzy *wyciągania*, albo trzy *ściskania*, powierzchnia (21) jest *elipsoidą* współśrodkową z elipsoidą (18), mającą osie skierowane w ten sam sposób, lecz wielkości ich są proporcyonalne do pierwiastków kwadratowych z ciśnień głównych; wtenczas półśrednica D przedstawia ciśnienie tego samego gatunku jak ciśnienia główne, t. j. albo *wyciąganie* albo *ściskanie pochyłe*. Jeżeli zaś pierwiastki równania (14) mają znaki różne, t. j. jeżeli one przedstawiają albo dwa *wyciągania* i jedno *ściskanie*, albo dwa *ściskania* i jedno *wyciąganie*, powierzchnia (21) przedstawia jednocześnie dwie *hyperboloidy*, jedną o *jednej powłoce*, drugą o *dwóch powłokach*, mające wspólny *stożek niemalstyczny*,

$$\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{A_2} + \frac{z^2}{A_3} = 0; \tag{22}$$

jeżeli półśrednica D spotyka hyperboloidę o jednej powłoce, przedstawia wtedy ciśnienie pochyłe, gatunku, który jest podwójny pomiędzy ciśnieniami głównemi; jeżeli zaś spotyka hyperboloidę o dwóch powłokach, przedstawia ciśnienie pochyłe gatunku jedynego. Przejście ciśnień z jednego gatunku do drugiego dokonywa się na stożku (22); półśrednica D spoczywająca na tej powierzchni przedstawia ciśnienie styczne, wywierające się na płaszczyznę styczną do stożka, podług krawędzi D. Z tego powodu, można nazwać stożek (22) *stożkiem ciśnień stycznych*, lub prościej, *stożkiem ślizgania* albo *tarcia*.

24. Przypadek dwóch ciśnień głównych. — Jeżeli ostatni wyraz równania (14) jest zerem, istnieje w punkcie M jeden element płaski na który nie wywiera się żadne ciśnienie; równania zaś (1) dowodzą, że płaszczyzna tego elementu zawiera w sobie wszystkie ciśnienia wywierane na elementa pozostałe.

Wziąwszy ją za płaszczyznę xy względem początku M, i za osie x, y kierunki dwóch ciśnień głównych (A_1, A_2), gdy trzecie ($A_3 = 0$) nie istnieje; i oznaczywszy nadto, przez γ pochylenie elementu płaskiego ω na który wywiera się ciśnienie przedstawione przez prostę D wychodzącą z M, i której koniec ma za współrzędne x, y, $z = 0$, dostawy m, n, p otrzymuje się z formuł

$$m = \frac{x}{A_1}, \quad n = \frac{y}{A_2}, \quad p = \cos\gamma.$$

Ztąd zamiast elipsoidy ciśnień mamy elipsę w płaszczyznie xy posiadającą za równanie

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2\gamma, \tag{23}$$

płaszczyzną zaś ω jest

$$\frac{xX}{A_1} + \frac{yY}{A_2} + Z\cos\gamma = 0.$$

Podług tych związków, ciśnienia wywierane na wszystkie płaszczyzny tego samego pochylenia γ, są półśrednicami D elipsy (23) mającej osie proporcyonalne do $\sin\gamma$ i odpowiednio do A_1 i A_2. Płaszczyzna, o pochyleniu γ, na którą wywiera się ciśnienie przedstawione przez półśrednicę D tej elipsy, przecina się z jej płaszczyzną xy podług prostej

$$\frac{xX}{A_1} + \frac{yY}{A_2} = 0,$$

równoległej od stycznej do krzywej mającej za równanie

$$\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{A_2} = \pm k^2, \tag{24}$$

w punkcie gdzie ją spotyka, pomieniona wyżej, półśrednica D. Równanie (24) przedstawia *elipsę* jeżeli A_1 i A_2 są tego sa-

mego znaku; *dwie hyperbole sprzężone*, jeżeli A_1 i A_2 są znaków przeciwnych. W tym drugim przypadku, jeżeli D ma za równanie

$$y = \pm x \sqrt{\frac{A_2}{A_1}},$$

wartość D przedstawia ciśnienie styczne, wywierające się na tę płaszczyznę o pochyleniu γ, której ta prosta jest śladem na płaszczyznie xy.

Rozmaitym pochyleniom γ odpowiadają elipsy podobne (23); dla największego, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, płaszczyzna ω jest prostopadłą do płaszczyzny ciśnień, a elipsa jej odpowiadająca ma za równanie

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1;$$

dla najmniejszego, $\gamma = 0$, równanie (23) daje

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 0,$$

zkąd wypada

$$x = 0, \quad y = 0,$$

zgodnie z założeniem któreśmy wyżej zrobili. Widzimy zatem, że zamiast elipsoidy ciśnień posiadamy teraz płaszczyznę xy elips (23) których osie mają za wielkości $A_1 \sin\gamma$ i $A_2 \sin\gamma$ i przybierają wszystkie pośrednie wartości, zawsze do $\sin\gamma$ i do A_1 i A_2 proporcyonalne, począwszy od zera aż do A_1, A_2; płaszczyznę tę nazwiemy *blaszką eliptyczną ciśnień*. Wszystkie te wypadki otrzymałyby się także z uważania blaszek eliptycznych i hyperbolicznych, do których się sprowadzają powierzchnie (18) i (21), gdy $A_3 = 0$, tłomacząc zręcznie nie-

oznaczoność pozorną płaszczyzn stycznych do brzegów tych blaszek, które są nieskończenie krzywemi.

25. Przypadek jednego ciśnienia głównego. — Przypadek w którym dwa ciśnienia główne nie istnieją ($A_2=0$, $A_3=0$), t. j. istnieje jedno tylko ciśnienie główne A_1, nie przedstawia żadnej trudności; na rozwiązanie jego zupełne wystarczają same równania (1). Podług tego twierdzenia, w przypadku o którym mowa, wszystkie ciśnienia są skierowane podług tej samej prostej L, co ciśnienie główne i jedyne A_1; ciśnienie więc wywierające się na element płaski ω, którego normalną jest l, otrzymuje się rzucając A na l, i odcinając rzut otrzymany na L. Oznaczywszy przez $\cos(L, l)$ dostawę kąta ktory dwie proste L i l z sobą tworzą, wartością ciśnienia na jednostkę elementu płaskiego ω jest ilość $A_1\cos(L, l)$. Zamiast więc elipsoidy ciśnień posiadamy odcinki $A_1\cos(L, l)$ rachowane w kierunku prostej L od tego samego punktu M, i przybierające wszystkie pośrednie wartości, zawsze proporcyonalne do $\cos(L, l)$ i do A_1, począwszy od zera aż do A_1; prostę tę o długości A_1 nazwiemy *wiązką ciśnień*.

Jeżeli dwa pierwiastki rownania (14) są sobie rownemi, powierzchnie (18) i (21) stają się obrotowemi, a wszystkie półśrednice należące do równika elipsoidy (18) przedstawiają ciśnienia normalne. Jeżeli zaś wszystkie trzy pierwiastki równania (14) są sobie równemi, powierzchnie (18) i (21) są kulami; wszystkie wtedy ciśnienia są normalne i posiadają tę samę wartość.

26. Ogólne uwagi. — Wypadki trzech pierwszych lekcyj, któreśmy następnie sprowadzili (Lek. IV) do przypadku równowagi zmyślonej lub prawdziwej, zawierają się w równaniach (1), (2) [**17**] i (16) [IV, **19**]. Pierwsze strony równań (1) [**17**] przedstawiają składowe sił działających na każdy punkt ciała podczas gdy pierwsze strony równań (2) [**17**] są składowemi ciśnień wywieranych na elementa płaskie przypadające nie-

tylko na powierzchni ciała, ale i w każdym jego punkcie. Przez przerobienie równań (1) i (2), tak rozumianych, otrzymaliśmy [**17**] ważne twierdzenie o równowadze ciała, określające jego mechaniczny charakter w stosunku do ciała sztywnego; ztąd twierdzenie to można uważać jako definicyę ciała naturalnego. W równaniu (16) [**19**] zawiera się zasada pracy mechanicznej, na której opieramy cały wykład mechaniki cząsteczkowej; równanie to wraz z równaniami (2) [**17**] daje twierdzenie ustępu [**21**], o naturze tejże pracy, charakteryzujące pod względem analitycznym warunki ruchu lub równowagi ciała naturalnego. Dwa twierdzenia [**17**] i [**21**] definiują kompletnie naturę ciała niesztywnego w sposób jasny i łatwy do zrozumienia. Do liczby tych twierdzień nie zaliczamy jeszcze jednego [**22**] (o istnieniu w każdym punkcie ciała jedynego układu prostościennego trzech elementów płaskich, podległych tylko ciśnieniom normalnym), z przyczyny, że mamy zamiar znacznie go uogólnić, lub właściwiej, dowieść na jego podstawie, twierdzenia o powierzchniach *izostatycznych* którego jest szczególnym przypadkiem. Badania te, wymagające znajomości współrzędnych krzywokreślnych, wyłożonemi będą na właściwém miejscu.

LEKCYA VI

Definicya błony i jej elementu. — Praca mechaniczna jednostki elementu błony. — Główny charakter błony. — Równania ruchu i równowagi. — Przypadki szczególne.

27. Definicya błony i jej elementu. — Rozbierając szczególne przypadki równania (14) [V, **22**] dającego ciśnienia główne, dwa pomiędzy innemi widzieliśmy : pierwszy gdy dwa jego pierwiastki są rożnemi od zera [V, **24**], drugi gdy jeden tylko z tych pierwiastków jest różnym od zera [V, **25**]. W lekcyi bieżącej i dwóch następnych zamierzamy wynaleźć przypadki te w naturze, t. j. przedstawić takie ciała, w których istnieją tylko albo *dwa ciśnienia główne*, albo *jedno ciśnienie główne*. To nas doprowadzi do definicyi *błony* i *włókna*.

Wiadomo [II, **6**] że główne zadanie mechaniki cząsteczkowej sprowadza się do wyznaczenia trzech funkcyj (u, v, w) czterech zmiennych (x, y, z, t), w przypadku ruchu, lub trzech zmiennych (x, y, z), w przypadku równowagi; lecz można się również pytać o trzy funkcye (u, v, w) trzech zmiennych (x, y, t) lub dwóch (x, y), a nawet o trzy funkcye (u, v, w) dwóch tylko zmiennych (x, t) lub jednej (x). Zacznijmy od przypadku pierwszego.

Jeżeli trzy funkcye u, v, w zależą tylko od trzech zmiennych x, y, t, wartości ich odnosić się mogą do punktów pewnej

powierzchni, danej przez równanie

(1) $$z=f(x, y);$$

a jeżeli zgodzimy się jeszcze nadać tej powierzchni grubość bardzo małą ε, rachowaną w kierunku jej normalnej i zmienną od punktu do punktu, to ciało, którego odkształcenia przedstawiają założone funkcye u, v, w, posiada dwa wymiary znaczniejsze według powierzchni (1) i jeden wymiar ε bardzo mały według normalnej do tej powierzchni, t. j. przedstawia *błonę* kształtu (1) o grubości ε. Zakładamy również, że powierzchnia (1) rozdziela wszędzie grubość ε na dwie równe części, i że każde dwa elementa dwóch powierzchni błony, przypadające na skrajnościach grubości ε, są równoległemi do elementu powierzchni (1), który przypada w środku tej grubości.

Oznaczając przez m_1, n_1, p_1, dostawy kątów które normalna do powierzchni (1) tworzy z osiami x, y, z i zakładając

$$h=\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

mamy jak wiadomo

(2) $$m_1=-\frac{1}{h}\frac{dz}{dx}, \quad n_1=-\frac{1}{h}\frac{dz}{dy}, \quad p=\frac{1}{h},$$

element powierzchni (1) posiada wartość

$$dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=dxdy\,h$$

a objętość elementu błony (1) wyraża się przez

$$dxdy\,h\varepsilon,$$

albowiem ε jest jej grubością.

28. Praca mechaniczna jednostki elementu błony. — Sześciu ilościom $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, od których zależy praca mecha-

niczna jednostki elementu w przypadku najogólniejszym [III, **12**, (3)], odpowiadają teraz ilości

$$(3)\qquad \frac{du}{dx},\quad \frac{dv}{dy},\quad \frac{dw}{dy},\quad \frac{dw}{dx},\quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx};$$

praca więc mechaniczna P jednostki elementu błony jest funkcyą pięciu ilości (3) a przyrost jej δP ma postać

$$(4)\qquad \delta P = \left\{ \begin{array}{l} N_1\delta\frac{du}{dx}+T_1\delta\frac{dw}{dy} \\ +N_2\delta\frac{dv}{dy}+T_2\delta\frac{dw}{dx} \\ +T_3\delta\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right) \end{array} \right\}.$$

Funkcye u, v, w, zależne od dwóch zmiennych x, y, uważać właściwie wypada jako zależne od trzech ilości x, y, z, rozumiejąc przez z drugą stronę równania (1). Z tej przyczyny ilości (3) przedstawić można jak następuje

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dy},$$

$$\frac{dw}{dy}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dy},$$

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dy}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

gdzie dwa znaki (d, ∂) różniczkowania funkcyj u, v, w, odróżniają pochodne zupełne od pochodnych cząstkowych.

Zastępując w przyroście (4) ilości (3) przez drugie strony otrzymanych teraz równań i pamiętając że różniczkowanie δ stosuje się tylko do funkcyj u, v, w, znajdujemy bardzo łatwo

$$\delta P = \left\{ \begin{array}{l} N_1 \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \left(T_3 \frac{dz}{dx} + N_2 \frac{dz}{dy}\right) \delta \frac{\partial v}{\partial z} + T_1 \delta \frac{\partial w}{\partial y} \\ + N_2 \delta \frac{\partial v}{\partial y} + T_2 \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_1 \frac{dz}{dx} + T_3 \frac{dz}{dy}\right) \delta \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \left(T_2 \frac{dz}{dx} + T_1 \frac{dz}{dy}\right) \delta \frac{\partial w}{\partial z} + T_3 \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{array} \right\};$$

a że [**12** (3)] ciśnień (N_i, T_i), w jednym punkcie jakiegokolwiek ciała, jest najwyżej sześć i każde z nich, w przyroście pracy mechanicznej jednostki elementu, mnoży odpowiednią sobie ilość z sześciu następujących

$$\delta \frac{\partial u}{\partial x}, \ \delta \frac{\partial v}{\partial y}, \ \delta \frac{\partial w}{\partial z}, \ \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \ \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \ \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

pomiędzy współczynnikami przyrostu δP zachodzą, z tej przyczyny, związki

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{c} T_1 = T_3 \frac{dz}{dx} + N_2 \frac{dz}{dy}, \\ T_2 = N_1 \frac{dz}{dx} + T_3 \frac{dz}{dy}, \\ N_3 = T_2 \frac{dz}{dx} + T_1 \frac{dz}{dy} = N_1 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2T_3 \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} + N_2 \left(\frac{dz}{dy}\right)^2. \end{array} \right.$$

Trzeci ze związków (5) daje ciśnienie N_3 i zarazem pokazuje że wartość jego jest w ogólności różną od zera. Wyraz więc $N_3 \delta \frac{dw}{dz}$, jako przyrost pracy mechanicznej pochodzący od istniejącego ciśnienia N_3, zachodzić powinien w przyroście (4), niedostatek zaś tego wyrazu pochodzić jedynie może z przyczyny równości

$$\delta \frac{dw}{dz} = 0.$$

Ponieważ $\delta \frac{dw}{dz}$ oznacza wszelki możliwy przyrost liczby $\frac{dw}{dz}$, a wartość jego jest zerem, pomieniona liczba nie może żadnym sposobem zmieniać swojej wielkości, co wtenczas tylko ma miejsce gdy $\frac{dw}{dz}$ jest stałem. Lecz praca mechaniczna P jednostki elementu błony zależy tylko od pięciu ilości (3), liczba więc stała $\frac{dw}{dz}$, od której taż praca nie zależy, a powinna także zależyć, musi być rowną jedności; albowiem tylko jedność jest taką ilością od której każda funkcya może, w jakikolwiekbądź sposób, jednocześnie zależeć i nie zależeć, bez naruszenia swojej wartości. Ztąd oczywiście wypada równanie

$$dz = dw$$

dające

$$z = w + c,$$

gdzie c jest ilością stałą. Biorąc za płaszczyznę współrzędnych xy płaszczyznę $z = c$, posiadamy, jednocześnie z trzecim związkiem (5), związek

$$z = w, \tag{6}$$

zamieniający dwa pozostałe na równania

$$\left\{ \begin{aligned} T_1 &= T_3 \frac{dw}{dx} + N_2 \frac{dw}{dy}, \\ T_2 &= N_1 \frac{dw}{dx} + T_3 \frac{dw}{dy}. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Otrzymane teraz wypadki (7) pozwalają wyznaczyć kształt funkcyi P wyrażającej pracę mechaniczną jednostki elementu błony. Jakoż, zakładając

$$a = \frac{du}{dx}, \quad b = \frac{dv}{dy}, \quad c = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}, \quad \alpha = \frac{dw}{dx}, \quad \beta = \frac{dw}{dy},$$

mamy na mocy przyrostu (4)

$$N_1=\frac{dP}{da},\quad N_2=\frac{dP}{db},\quad T_3=\frac{dP}{dc},\quad T_1=\frac{dP}{d\beta},\quad T_2=\frac{dP}{d\alpha},$$

a z przyczyny związków (7), znajdujemy dwa jednoczesne równania

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{dP}{d\beta}=\dfrac{dP}{dc}\alpha+\dfrac{dP}{db}\beta, \\[2ex] \dfrac{dP}{d\alpha}=\dfrac{dP}{da}\alpha+\dfrac{dP}{dc}\beta, \end{cases}$$

posiadające za całkę, szukaną funkcyę P.

W przypuszczeniu że funkcya P jest całką pierwszego tylko z równań (8), znalezlibyśmy

$$(9)\qquad P=F(\omega_2, \omega_3),$$

gdzie

$$\omega_2=b+\frac{1}{2}\beta^2,\quad \omega_3=c+\alpha\beta,$$

są całkami dwóch równań jednoczesnych

$$\frac{d\beta}{-1}=\frac{db}{\beta}=\frac{dc}{\alpha},$$

a F oznacza funkcyę dowolną; w założeniu zaś że funkcya P sprawdza tylko drugie z równań (8), mielibyśmy

$$(10)\qquad P=F(\omega_1, \omega_3),$$

gdzie

$$\omega_1=a+\frac{1}{2}\alpha^2,\quad \omega_3=c+\alpha\beta,$$

są całkami dwóch równań jednoczesnych

$$\frac{d\alpha}{-1}=\frac{da}{\alpha}=\frac{dc}{\beta}.$$

Obie więc funkcye (9) i (10) zależą od tej samej funkcyi ω_3, i oprócz tego, funkcya (9) zależy od ω_2, niezawierającego w sobie (a, c, α) zmiennych niezależnych drugiego z równań (8), podczas gdy funkcya (10) zależy od ω_1, niezawierającego w sobie (b, c, β) zmiennych niezależnych pierwszego z równań (8). Ztąd oczywiście wypada że tylko funkcya

$$P=F(\omega_1, \omega_2, \omega_3)=F\left(a+\frac{1}{2}\alpha^2,\quad b+\frac{1}{2}\beta^2,\quad c+\alpha\beta\right)$$

sprawdza oba równania (8), a zatem, że jest szukaną ich całką. Przywracając pierwotne znaczenia ilościom a, b, c, α i β, znajdujemy następujące bardzo ważne twierdzenie: *praca mechaniczna* P *jednostki elementu błony wyraża się, w układzie prostokątnym, przez drugą stronę równania*

$$(11)\quad P=F\left\{\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2,\ \frac{dv}{dy}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}\right)^2,\ \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}\right\},$$

rozumiejąc przez F *funkcyę zależną od natury ciała z którego błona jest utworzoną.*

29. Główny charakter błony. — Mnożąc równania (5) przez $\frac{1}{h}$, znajdujemy na mocy związków (2)

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} m_1N_1+n_1T_3+p_1T_2=0,\\ m_1T_3+n_1N_2+p_1T_1=0,\\ m_1T_2+n_1T_1+p_1N_3=0; \end{array}\right.$$

pierwsza formuła (12) otrzymuje się z drugiej (5), druga (12)

z pierwszej (5) a trzecia (12) z trzeciej (5). Ponieważ ilości (m_1, n_1, p_1) (2) są dostawami kątów które normalna do powierzchni (1) tworzy z osiami współrzędnych, równania (12) wyrażają, podług twierdzenia (5) [III, **12**], że elementa płaskie błony, styczne do powierzchni (1) nie doznają żadnych ciśnień i że ciśnienia wywierane w tym samym punkcie na pozostałe elementa, działają w płaszczyźnie stycznej do powierzchni (1).

Przez wyrugowanie dwóch ilości $\frac{dz}{dx}$ i $\frac{dz}{dy}$ z trzech związków (5) otrzymujemy na równanie wypadkowe

$$N_1 N_2 N_2 + 2 T_1 T_2 T_3 = N_1 T_1^2 + N_2 T_2^2 + N_3 T_3^2,$$

i ostatni wyraz równania (14) [**22**] dającego ciśnienia główne jest zerem. Składając ten wypadek z wypadkiem poprzedzającym (12), główny charakter błony określi się jak następuje: *w każdym punkcie błony jedno z ciśnień głównych* (*ciśnienie na element styczny do błony*) *jest zerem, a wszystkie inne ciśnienia działają w płaszczyźnie stycznej do błony, z którą się schodzi płaszczyzna eliptyczna ciśnień.*

30. Równania ruchu i równowagi. — Oznaczywszy kształt pracy mechanicznej jednostki elementu [**28**] i główny charakter błony [**29**], przystępujemy do wyznaczenia warunków jej ruchu i równowagi. Szukajmy w tym celu przyrostu pracy mechanicznej tej części błony (1) która jest ograniczoną walcem zamkniętym, równoległym do osi z i mającym za równanie

(13) $$\varphi(x, y) = 0.$$

Całka podwójna $\int\int dx dy h \varepsilon \delta P$, rozumiejąc przez δP drugą stronę równania (4), wzięta w granicach krzywej (13) na płaszczyźnie xy, jest oczywiście szukanym przyrostem, który także, za pomocą znanej metody całkowania przez części [II, **9**],

przedstawić można jak następuje

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \int\int dxdyh\varepsilon\delta P = \int\int dxdy &\left\{\begin{aligned} &-\left(\frac{dh\varepsilon N_1}{dx}+\frac{dh\varepsilon T_3}{dy}\right)\delta u \\ &-\left(\frac{dh\varepsilon T_3}{dx}+\frac{dh\varepsilon N_2}{dy}\right)\delta v \\ &-\left(\frac{dh\varepsilon T_2}{dx}+\frac{dh\varepsilon T_1}{dy}\right)\delta w \end{aligned}\right\} \\ +\int ds_1 h\varepsilon &\left\{\begin{aligned} &(N_1\cos\alpha + T_3\cos\beta)\delta u \\ &+(T_3\cos\alpha + N_2\cos\beta)\delta v \\ &+(T_2\cos\alpha + T_1\cos\beta)\delta w \end{aligned}\right\}, \end{aligned}\right.$$

gdzie ds_1 oznacza element łuku krzywej (13) a α i β są kątami które normalna do tego elementu tworzy z osiami x i y.

Nazwijmy przez ρ gęstość błony w punkcie M a przez X_0, Y_0, Z_0 składowe, według osi x, y, z, siły działającej na jednostkę jej massy w tym samym punkcie. Różnice

$$\rho\left(X_0 - \frac{d^2u}{dt^2}\right)dxdyh\varepsilon,\quad \rho\left(Y_0 - \frac{d^2v}{dt^2}\right)dxdyh\varepsilon,\quad \rho\left(Z_0 - \frac{d^2w}{dt^2}\right)dxdyh\varepsilon$$

są, jak wiadomo [II, **10**], równemi odpowiednim współczynnikom ilości δu, δv, δw pod całką podwójną w drugiej stronie równania (14). To daje, po opuszczeniu wspólnego czynnika $dxdy$,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dh\varepsilon N_1}{dx}+\frac{dh\varepsilon T_3}{dy}+h\varepsilon\rho X_0 = h\varepsilon\rho\frac{d^2u}{dt^2}, \\ &\frac{dh\varepsilon T_3}{dx}+\frac{dh\varepsilon N_2}{dy}+h\varepsilon\rho Y_0 = h\varepsilon\rho\frac{d^2v}{dt^2}, \\ &\frac{dh\varepsilon T_2}{dx}+\frac{dh\varepsilon T_1}{dy}+h\varepsilon\rho Z_0 = h\varepsilon\rho\frac{d^2w}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

równania ruchu w każdym punkcie błony. Zastępując w trzecim z nich ilości T_1 i T_2 przez drugie strony równań (7), wykonywając następnie wskazane rożniczkowania, uwzględniając dwa pierwsze równania (15) i dzieląc otrzymany wypadek przez $h\varepsilon$, grupa (15) przechodzi na układ równań

$$
(16)\quad \begin{cases}
\dfrac{dh\varepsilon N_1}{dx} + \dfrac{dh\varepsilon T_3}{dy} + h\varepsilon\rho X_0 = h\varepsilon\rho \dfrac{d^2u}{dt^2}, \\[2ex]
\dfrac{dh\varepsilon T_3}{dx} + \dfrac{dh\varepsilon N_2}{dy} + h\varepsilon\rho Y_0 = h\varepsilon\rho \dfrac{d^2v}{dt^2}, \\[2ex]
N_1 \dfrac{d^2w}{dx^2} + 2T_3 \dfrac{d^2w}{dxdy} + N_2 \dfrac{d^2w}{dy^2} + \rho\left(Z_0 - X_0 \dfrac{dw}{dx} - Y_0 \dfrac{dw}{dy}\right) \\[2ex]
\qquad = \rho\left(\dfrac{d^2w}{dt^2} - \dfrac{d^2u}{dt^2}\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{d^2v}{dt^2}\dfrac{dw}{dy}\right).
\end{cases}
$$

Współczynniki ilości δu, δv, δw pod całką pojedynczą w drugiej stronie równania (14) są składowemi, według osi x, y, z, ciśnienia wywieranego na element $ds_1 h\varepsilon$ *powierzchni bocznej* błony, która jest, podług założenia, powierzchnią walcową (13). Nazywając te składowe przez $ds_1 h\varepsilon X_1$, $ds_1 h\varepsilon Y_1$, $ds_1 h\varepsilon Z_1$, i uwzględniając związki (5) i (6), mamy

$$
(17)\quad \begin{cases}
N_1 \cos\alpha + T_3 \cos\beta = X_1, \\
T_3 \cos\alpha + N_2 \cos\beta = Y_1, \\
X_1 \dfrac{dw}{dx} + Y_1 \dfrac{dw}{dy} = Z_1.
\end{cases}
$$

Poznawszy znaczenie równań (17), lub właściwiej, ilości X_1, Y_1, Z_1, łatwo jest teraz ograniczyć błonę, nie powierzchnią walcową równoległą do osi z, ale jakąbądź powierzchnią rozwijalną, mającą np. za równanie

$$
(18)\qquad \psi(x, y, z) = 0.
$$

Oznaczając przez m, n, p dostawy kątów które normalna zewnętrzna powierzchni (18), w punktach wspólnych z po-

wierzchnią (1), tworzy z osiami współrzędnych, i nazywając przez X, Y, Z składowe, według tych osi, ciśnienia wywieranego na jednostkę elementu $d\omega$ tej nowej powierzchni bocznej, mamy na mocy twierdzeń (5) [**12**], (5) i (6) [**28**]

$$(19)\quad \begin{cases} mN_1 + nT_3 + pT_2 = X, \\ mT_3 + nN_2 + pT_1 = Y, \\ X\dfrac{dw}{dx} + Y\dfrac{dw}{dy} = Z, \end{cases}$$

i całkę pojedynczą, w drugiej stronie równania (14), należy zastąpić całką pojedynczą

$$\int d\omega\,(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w),$$

w której X, Y, Z są pierwszemi stronami równań (19). Lecz, jeżeli powierzchnia rozwijalna (18) przecina powierzchnię (1) wszędzie pod kątem prostym, wypada na mocy równań (2) i (6)

$$(20)\quad p = m\frac{dw}{dx} + n\frac{dw}{dy},$$

wartością zaś elementu $d\omega$ jest εds, rozumiejąc przez ds element łuku krzywej ograniczającej powierzchnię (1). Równania (19) dają wtedy, na mocy związków (2), (5), (6) i (20), grupę równań

$$(21)\quad \begin{cases} m\left[N_1 + N_1\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2 + T_3\dfrac{dw}{dx}\dfrac{dw}{dy}\right] \\ \qquad + n\left[T_3 + N_1\dfrac{dw}{dx}\dfrac{dw}{dy} + T_3\left(\dfrac{dw}{dy}\right)^2\right] = X, \\ m\left[T_3 + T_3\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2 + N_2\dfrac{dw}{dx}\dfrac{dw}{dy}\right] \\ \qquad + n\left[N_2 + T_3\dfrac{dw}{dx}\dfrac{dw}{dy} + N_2\left(\dfrac{dw}{dy}\right)^2\right] = Y, \\ X\dfrac{dw}{dx} + Y\dfrac{dw}{dy} = Z, \end{cases}$$

całka zaś pojedyncza w równaniu (14) zamienia się na całkę, także pojedynczą,

$$(22) \qquad \int \varepsilon ds (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w),$$

w której X, Y, Z oznaczają pierwsze strony równań (21).

Ten drugi przypadek jest najodpowiedniejszym definicyi błony. Z przyczyny że powierzchnia (18) jest rozwijalną i przecina powierzchnię (1) wszędzie pod kątem prostym, element εds powierzchni bocznej zależy tylko od łuku krzywej, powierzchnię środkową (1) ograniczającej, i od grubości błony; ztąd obie całki, t. j. całka podwojna i całka pojedyncza (22), w drugiej stronie równania (14) zachodzące, zawierają w sobie te tylko elementa błony, które do jej definicyi należą.

W równaniach (16) i (21) należy jeszcze zastąpić ciśnienia N_1, N_2, T_3 przez odpowiednie pochodne funkcyi P (11) względem ilości $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}$. Podstawienie to zamienia równania (16), pierwszego rzędu względem N_1, N_2, T_3, na równania rzędu drugiego względem funkcyj u, v, w, podczas gdy równania (21) stają się tylko równaniami rzędu pierwszego. Całki więc (u, v, w) równań rzędu drugiego (16) sprawdzać jeszcze powinny warunki rzędu pierwszego (21), na powierzchni bocznej błony. W wielu bardzo przypadkach powierzchnia boczna błony jest nieruchomą, wartości zatem całek u, v, w są na obwodzie powierzchni (1) zerami, a drugie strony równań (21) dają ciśnienia, które należy zrównoważyć na powierzchni bocznej błony ażeby pomieniony warunek otrzymać. Jeżeli zaś powierzchnia boczna błony jest wolną, i jeżeli błona znajduje się w środku wywierającym ciśnienia normalne na wszystkie jej punkta, ciśnienie na powierzchnię jej boczną jest także normalnem i w ogólności nieoznaczoném.

Wartością jego jest

$$mX + nY + pZ,$$

warunek zaś że jest normalnem wyraża się zakładając

$$X\frac{d\psi}{dx} + Y\frac{d\psi}{dy} + Z\frac{d\psi}{dz} = 0.$$

Z przyczyny równania (6), funkcya

$$w = f(x, y, t)$$

wyobraża równanie powierzchni środkowej błony, a z tego powodu, po zcałkowaniu równań (16) z warunkami (21), nie znalibyśmy jeszcze jej kształtu do którego się znalezione wartości funkcyj u, v, w, odnoszą. Ażeby kształt ten oznaczyć, należy założyć równowagę uważanej błony, t. j. zastąpić zerami drugie strony równań (16). Ciśnienie normalne

$$mX + nY + pZ,$$

w czasie ruchu nieoznaczone, jest w czasie spoczynku ciśnieniem oznaczonem F; ztąd grupa równań (21) daje, na mocy związku (20), dwa tylko równania

$$(23)\quad \begin{cases} m\left[N_1 - F + N_1\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2 + T_3\dfrac{dw}{dx}\dfrac{dw}{dx}\right] \\ \qquad\qquad + n\left[T_3 + N_1\dfrac{dw}{dx}\dfrac{dw}{dy} + T_3\left(\dfrac{dw}{dy}\right)^2\right] = 0, \\ m\left[T_3 + T_3\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2 + N_2\dfrac{dw}{dx}\dfrac{dw}{dy}\right] \\ \qquad\qquad + n\left[N_2 - F + T_3\dfrac{dw}{dx}\dfrac{dw}{dy} + N_2\left(\dfrac{dw}{dy}\right)^2\right] = 0, \end{cases}$$

albowiem trzecie równanie (21) zamienia się na tożsamość.

Całki (u, v, w) równań (16), zcałkowanych w tém nowém założeniu, sprawdzające warunki (23), nie zależą już od zmien-

nej t, a ztąd funkcya

$$w = f(x, y)$$

wyobraża kształt błony (1) do którego się warunki (16) jej ruchu odnoszą. Oczywistem jest także, że przypadek równowagi błony (1) traktować można nierównie ogólniej, zakładając na ciśnienia X, Y i Z w równaniach (21), jakiekolwiek wartości.

31. Przypadki szczególne. — Jeżeli wszystkie punkta błony poruszają się po liniach prostych względem siebie równoległych, to biorąc kierunek ich za kierunek osi z, mamy oczywiście

$$u = 0, \quad v = 0,$$

zkąd ciśnienia N_1, N_2, N_3 zależą tylko od $\frac{dw}{dx}$ i $\frac{dw}{dy}$. Grupa rownań (16) sprowadza się wtedy do jednego

$$(24) \quad N_1 \frac{d^2w}{dx^2} + 2T_3 \frac{d^2w}{dxdy} + N_2 \frac{d^2w}{dy^2} + \rho\left(Z_0 - X_0 \frac{dw}{dx} - Y_0 \frac{dw}{dy}\right) = \rho \frac{d^2w}{dt^2},$$

którego całka w powinna zamieniać tożsamościowo, pierwsze strony dwóch pozostałych, na zera.

Przypadek ten ma bardzo ważne zastosowanie w badaniu drgania błony płaskiej lub blaszki płaskiej, jak to ma miejsce w bębnie gdzie błona, we wszystkich kierunkach jednakowo wyciągnięta, drga z powodu uderzeń pałeczką; lub w klarnecie gdzie blaszka, w jednym końcu stale umocowana, porusza się peryodycznie, pobudzana do tego silnym prądem powietrza. Oba te przypadki, jako należące bardziej do *części całkowej*, rozebranemi tam będą szczegółowo.

LEKCYA VII

Formuły pomocnicze. — Definicya włókna i jego elementu. — Praca mechaniczna jednostki elementu włókna. — Główny charakter włókna.

32. Formuły pomocnicze. — Mnożąc trzy ostatnie równania (12) [IV, 18] przez $\frac{1}{2}$ i zakładając

$$\frac{du}{dx} = D_1, \quad \frac{dv}{dy} = D_2, \quad \frac{dw}{dz} = D_3,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) = E_1, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) = E_2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) = E_3,$$

dostrzega się bardzo łatwo, że prawo zmieniania się około punktu M, wartości sześciu ilości (D_i,E_i) jest zupełnie takie same jak prawo zmieniania się wartości sześciu ciśnień (N_i, T_i); albowiem tak przekształcone równania (12) [**18**] niczem się nie różnią od równań (15) [**18**]. Podobnie więc jak elipsoida ciśnień (N_i, T_i) istnieje także elipsoida ilości (D_i, E_i), którą nazwiemy *elipsoidą odkształceń* i do której stosują się wszystkie te własności, któreśmy o elipsoidzie ciśnień w lekcyi V^tej wyłożyli. Z pomiędzy tych własności, przypominamy jedną [V, **21**] na mocy której ilości (D_i, E_i) są rzutami na osie współrzędnych *trzech średnic sprzężonych*, odpowiadających trzem ścianom, elementu *dxdydz*, prostopadłym do pomienionych osi.

Również także, jak w elipsoidzie ciśnień [V, **22**], istnieje

jedyny układ średnic do siebie prostopadłych, t. j. *układ osi elipsoidy odkształceń*, w którym mamy

$$(1) \qquad E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0.$$

Jeżeli więc elipsoida jest *kulą*, oprócz równości (1) posiadamy jeszcze następujące

$$D_1 = D_2 = D_3,$$

albowiem w kuli wszystkie trzy osie są sobie równemi.

Przypuśćmy teraz że wartości ilości (D_i, E_i) nie zależą od położenia układu współrzędnych, t. j. że są *niezmiennikami*. W założeniu takiem, wszystkie układy średnic sprzężonych są jednakowemi, co ma miejsce tylko w kuli, a zatem, *jeżeli ilości* (D_i, E_i), *są niezmiennikami, jest zawsze jednocześnie*

$$D_1 = D_2 = D_3,$$

$$E_1 = 0, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = 0.$$

Biorąc zamiast trzech funkcyj (u, v, w) dwie tylko v i w, i zamiast sześciu ilości (D_i, E_i) trzy następujące

$$D_2 = \frac{dv}{dy}, \quad D_3 = \frac{dw}{dz}, \quad E_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right);$$

elipsoida odkształceń zamienia się na *elipsę odkształceń* położoną na płaszczyznie równoległej do płaszczyzny yz. Elipsie tej odpowiadają ilości D_2, D_3, E_1, w podobny sposób jak elipsoidzie odpowiadają ilości (D_i, E_i); *jeżeli więc trzy ilości* D_2, D_3, E_1 *są niezmiennikami względem y i z, jest również*

$$(2) \qquad D_2 = D_3, \quad E_1 = 0,$$

i elipsa staje się kołem.

33. Definicya włókna i jego elementu. — Jeżeli trzy funkcye u, v, w zależą tylko od dwóch zmiennych x, t, warto-

ści ich odnosić się mogą do punktów pewnej linii krzywej, danej przez równania

$$(3)\qquad \begin{cases} y = f_1(x) \\ z = f_2(x); \end{cases}$$

a jeżeli zgodzimy się jeszcze ażeby przecięcie normalne krzywej (3) posiadało bardzo małe pole ω, zmienne od punktu do punktu, to ciało, którego odkształcenia przedstawiają założone funkcye u, v, w, posiada jeden wymiar znaczniejszy według krzywej (3) i dwa wymiary bardzo małe według przecięcia ω, t. j. przedstawia *włókno* kształtu (3) o przecięciu ω. Zakładamy również, że krzywa (3) spotyka przecięcie poprzeczne ω zawsze w jego środku ciężkości.

Oznaczając przez ds element łuku krzywej (3) i zakładając

$$h = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

mamy oczywiście

$$(4)\qquad ds = h\,dx,$$

a ilości

$$(5)\qquad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{h}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{h}\frac{dz}{dx}$$

są dostawami kątów, które styczna do krzywej (3) tworzy z osiami współrzędnych.

Objętością elementu włókna (3) jest

$$\omega\,ds = h\omega\,dx,$$

albowiem ω jest polem normalnego przecięcia włókna.

34. Praca mechaniczna jednostki elementu włókna. — Sześciu ilościom $\frac{d(v, u, w)}{d(x, y, z)}$, od których zależy praca mecha-

niczna jednostki elementu w przypadku najogólniejszym [III, **12** (3)], odpowiadają teraz ilości

$$(6) \qquad \frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dx}, \quad \frac{dw}{dx};$$

praca więc mechaniczna P, jednostki elementu włókna, jest funkcyą trzech ilości (6) a przyrost jej δP ma postać

$$(7) \qquad \delta P = N_1 \delta \frac{du}{dx} + T_3 \delta \frac{dv}{dx} + T_2 \delta \frac{dw}{dx}.$$

Funkcye u, v, w zależne od jednej zmiennej x, uważać właściwie wypada jako zależne od trzech ilości x, y, z, z których dwie y i z są funkcyami zmiennej x, danemi przez drugie strony równań (3). Z tej przyczyny ilości (6) przedstawić można jak następuje

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

gdzie dwa znaki (d, ∂) różniczkowania funkcyj u, v, w, odróżniają pochodne zupełne od pochodnych cząstkowych.

Zastępując w przyroście (7) ilości (6) przez drugie strony otrzymanych teraz równań i pamiętając że różniczkowanie δ stosuje się tylko do funkcyj u, v, w, znajdujemy bardzo łatwo

$$\delta P = \left\{ \begin{array}{l} N_1 \delta \frac{\partial u}{\partial x} + T_3 \frac{dz}{dx} \delta \frac{\partial v}{\partial z} + T_2 \frac{dy}{dx} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \\ + T_3 \frac{dy}{dx} \delta \frac{\partial v}{\partial y} + T_2 \delta \frac{\partial w}{\partial x} + N_1 \frac{dz}{dx} \delta \frac{\partial u}{\partial z} \\ + T_2 \frac{dz}{dx} \delta \frac{\partial w}{\partial z} + N_1 \frac{dy}{dx} \delta \frac{\partial u}{\partial y} + T_3 \delta \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\};$$

a że [**12** (3)] ciśnień (N_i, T_i), w jednym punkcie jakiegokolwiek ciała, jest najwyżej sześć i każde z nich, w przyroście pracy mechanicznej jednostki elementu, mnoży odpowiednią sobie ilość z sześciu następujących

$$\delta\frac{\partial u}{\partial x},\quad \delta\frac{dv}{dy},\quad \delta\frac{\partial w}{\partial z},\quad \delta\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

pomiędzy współczynnikami przyrostu δP zachodzą, z tej przyczyny, związki

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} & T_1 = T_2\frac{dy}{dx} = T_3\frac{dz}{dx}, \\ & N_2 = T_3\frac{dy}{dx},\quad T_2 = N_1\frac{dz}{dx}, \\ & N_3 = T_2\frac{dz}{dx},\quad T_3 = N_1\frac{dy}{dx}, \end{aligned}\right.$$

z których zapisujemy oddzielnie dwa następujące

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} & T_2 = N_1\frac{dz}{dx}, \\ & T_3 = N_1\frac{dy}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Pozostałe równania (8) dają ciśnienia N_2, N_3, T_1 i zarazem pokazują że wartości ich są w ogólności różnemi od zera. Wyrazy więc

$$N_2\delta\frac{dv}{dy},\quad N_3\delta\frac{dw}{dz},\quad T_1\delta\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right),$$

jako przyrosty pracy mechanicznej pochodzące od istniejących ciśnien N_2, N_3, T_1, zachodzić powinny w przyroście (7); niedostatek zaś tych wyrazów pochodzić jedynie może z przyczyny równości

$$\delta\frac{dv}{dy}=0,\quad \delta\frac{dw}{dz}=0,\quad \delta\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)=0.$$

Ponieważ $\delta\frac{dv}{dy}$, $\delta\frac{dw}{dz}$, $\delta\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)$ oznaczają wszelkie możliwe przyrosty liczb $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}$, a wartości ich są zerami; pomienione liczby nie mogą żadnym sposobem zmieniać swoich wielkości, co wtenczas tylko ma miejsce gdy ilości, które oznaczamy jak następuje

$$\frac{dv}{dy}=D_2\,,\quad \frac{dw}{dz}=D_3\,,\quad \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=2E_1\,,$$

są stałemi. Liczby stałe D_2, D_3, E_1 niezależne ani od natury włókna, ani od położenia układu współrzędnych, są oczywiście niezmiennikami, i mamy na mocy twierdzenia (2)

$$D_2=D_3=c\,,\quad E_1=0\,.$$

Lecz praca mechaniczna P jednostki elementu włókna zależy tylko od trzech ilości (7); liczba więc stała c, od której taż praca nie zależy, a powinna także zależyć, musi być równą jedności; albowiem tylko jedność jest taką ilością od której każda funkcya może, w jakikolwiek bądź sposób, jednocześnie zależyć i nie zależyć, bez naruszenia swojej wartości. Ztąd wypadają równania

$$dy=dv\,,\quad dz=dw$$

dające

$$y=v+c_2\,,\quad z=w+c_3\,,$$

gdzie c_2 i c_3 są ilościami stałemi. Biorąc za oś $x^{\text{ów}}$ prostą $y=c_2$, $z=c_3$, posiadamy, jednocześnie ze związkami (8), warunki

$$(10)\qquad y=v\,,\quad z=w\,,$$

zamieniające dwa związki (9) na równania

$$(11)\qquad \begin{cases} T_2=N_1\dfrac{dw}{dx}\,,\\[2ex] T_3=N_1\dfrac{dv}{dx}\,.\end{cases}$$

Otrzymane teraz wypadki (11) pozwalają wyznaczyć kształt funkcyi P, wyrażającej pracę mechaniczną jednostki elementu włókna. Jakoż, zakładając

$$a = \frac{du}{dx}, \quad \beta = \frac{dv}{dx}, \quad \gamma = \frac{dw}{dx},$$

mamy, na mocy przyrostu (7),

$$N = \frac{dP}{da}, \quad T_2 = \frac{dP}{d\gamma}, \quad T_3 = \frac{dP}{d\beta},$$

a z przyczyny związków (11), znajdujemy dwa jednoczesne równania

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dP}{d\gamma} &= \frac{dP}{da}\gamma, \\ \frac{dP}{d\beta} &= \frac{dP}{da}\beta, \end{aligned} \right.$$

posiadające za całkę, szukaną funkcyę P.

W przypuszczeniu że funkcya P jest całką pierwszego tylko z równań (12), znalezlibyśmy

$$P = F\left(a + \frac{1}{2}\gamma^2\right),$$

gdzie funkcya $a + \frac{1}{2}\gamma^2$ jest całką równania

$$\frac{d\gamma}{-1} = \frac{da}{\gamma}$$

a F oznacza funkcyę dowolną; w założeniu zaś że funkcya P sprawdza tylko drugie z równań (12), mielibyśmy

$$P = F\left(a + \frac{1}{2}\beta^2\right),$$

gdzie funkcya $a + \frac{1}{2}\beta^2$ jest całką równania

$$\frac{d\beta}{-1} = \frac{da}{\beta}.$$

Kształt równań (12) pokazuje, że funkcya P jest symetryczną względem dwóch ilości β i γ, z przyczyny więc że pierwsze z nich zależy tylko od γ a drugie od β, jedyna funkcya

$$P = F\left(a + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\right)$$

zadosyć uczynić może obydwóm równaniom (12), a zatem, jest szukaną ich całką. Przywracając pierwotne znaczenia ilościom a, β i γ znajdujemy następujące bardzo ważne twierdzenie: *praca mechaniczna* P *jednostki elementu włókna wyraża się, w układzie prostokątnym, przez drugą stronę równania*

$$(13) \qquad P = F\left\{\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\},$$

rozumiejąc przez F *funkcyę zależną od natury ciała z którego włókno jest utworzone.*

35. Główny charakter włokna. — Wprowadzając do równań (8) element ds łuku krzywej (3) znajdujemy, najpierw

$$\frac{dx}{ds}T_1 = \frac{dy}{ds}T_2 = \frac{dz}{ds}T_3$$

$$= \frac{N_1\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{N_2\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds}}{\frac{dy}{ds}} = \frac{N_3\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}}{\frac{dz}{ds}},$$

a następnie, po podzieleniu przez iloczyn $\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}$,

$$(14) \qquad \frac{N_1}{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2} = \frac{N_2}{\left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = \frac{N_3}{\left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \frac{T_1}{\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}} = \frac{T_2}{\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds}} = \frac{T_3}{\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}} = T,$$

gdzie T oznacza wspólną wartość równych sobie stosunków (14).

Ztąd wypadają równania

$$
(15) \quad \begin{cases} N_1 = T\left(\frac{dx}{ds}\right)^2, & N_2 = T\left(\frac{dy}{ds}\right)^2, \quad N_3 = T\left(\frac{dz}{ds}\right)^2, \\ T_1 = T\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}, & T_2 = T\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds}, \quad T_3 = T\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}, \end{cases}
$$

dające ciśnienia (N_i, T_i) w każdym punkcie włókna, w funkcyi dostaw kątów, które styczna do krzywej (3) tworzy z osiami współrzędnych, i nieznanej jeszcze ilości T. Ażeby charakter tej nieznanej wyznaczyć, nazwijmy przez X, Y, Z składowe według osi współrzędnych, ciśnienia wywieranego na jednostkę elementu prostopadłego do krzywej (3). Dostawami kątów które normalna tego elementu tworzy z osiami x, y, z są te same ilości,

$$
\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},
$$

które oznaczają dostawy kątów utworzonych przez styczną do krzywej (3) z temiż osiami; stosując zatem twierdzenie (5) [III, 12] znajdujemy najpierw

$$
X = N_1\frac{dx}{ds} + T_3\frac{dy}{ds} + T_2\frac{dz}{ds},
$$

$$
Y = T_3\frac{dx}{ds} + N_2\frac{dy}{ds} + T_1\frac{dz}{ds},
$$

$$
Z = T_2\frac{dx}{ds} + N_2\frac{dy}{ds} + N_3\frac{dz}{ds},
$$

a następnie, wprowadzając drugie strony równań (15), otrzymujemy

$$
X = T\frac{dx}{ds}, \quad Y = T\frac{dy}{ds}, \quad Z = T\frac{dz}{ds},
$$

albowiem jest tożsamościowo

$$
\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 .
$$

Znalezione teraz wartości na X, Y i Z dowodzą, że funkcya T jest wartością ciśnienia, wywieranego na jednostkę elementu płaskiego, prostopadłego do krzywej (3), i że kierunek tego ciśnienia schodzi się z kierunkiem stycznej do tejże krzywej, lub co na jedno wychodzi, z kierunkiem normalnej do elementu. Funkcya T nazywa się *natężeniem* włókna w punkcie M.

Oznaczmy przez m, n i p dostawy kątów które normalna do krzywej (3) tworzy z osiami x, y, z i szukajmy składowych ciśnienia, wywieranego w punkcie M włókna, na element płaski styczny do krzywej (3). Podług przytoczonego już twierdzenia (5) [**12**] i równań (15), składowe odpowiadające jednostce tego elementu mają wyrażenia

$$mN_1 + nT_3 + pT_2 = T\frac{dx}{ds}\left(m\frac{dx}{ds} + n\frac{dy}{ds} + p\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

$$mT_3 + nN_2 + pT_1 = T\frac{dy}{ds}\left(m\frac{dx}{ds} + n\frac{dy}{ds} + p\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

$$mT_2 + nT_1 + pN_3 = T\frac{dz}{ds}\left(m\frac{dx}{ds} + n\frac{dy}{ds} + p\frac{dz}{ds}\right) = 0;$$

albowiem jest tożsamościo o

$$m\frac{dx}{ds} + n\frac{dy}{ds} + p\frac{dz}{ds} = 0,$$

z powodu wzajemnej prostopadłości stycznej i normalnej, w tym samym punkcie krzywej linii (3). Własność ta dowodzi jednocześnie dwóch rzeczy: najprzód, że elementa styczne do krzywej (3) nie doznają żadnych ciśnień, powtóre, że ciśnienia wywierane na pozostałe elementa działają w kierunku stycznej do krzywej (3).

Rugując trzy ilości $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ i $\frac{dz}{ds}$ z sześciu równań (15)

znajdujemy bardzo łatwo

$$N_1 + N_2 + N_3 = T$$

$$T_1 \; T_2 \; T_3 = N_1 \; N_2 \; N_3$$

$$N_2 N_3 - T^2_1 = 0 , \quad N_3 N_1 - T^2_2 = 0 , \quad N_1 N_2 - T^2_3 = 0 ,$$

co daje

$$N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T^2_1 - T^2_2 - T^2_3 = 0 ,$$

$$N_1 N_2 N_3 + 2T_1 T_2 T_3 - N_1 T^2_1 - N_2 T^2_2 - N_3 T^2_3$$

$$= 2 (T_1 T_2 T_3 - N_1 N_2 N_3) + N_1 (N_2 N_3 - T^2_1)$$

$$+ N_2 (N_3 N_1 - T^2_2) + N_3 (N_1 N_2 - T^2_3) = 0 .$$

Dwa zatem ostatnie wyrazy równania (14) [V, **22**] odpadają, a ztąd, jedno tylko ciśnienie główne T jest różnem od zera. Składając ten wypadek z poprzedzającemi, główny charakter włókna określi się jak następuje : *w każdym punkcie włókna dwa z ciśnień głównych* (*ciśnienia na elementa styczne do włókna*) *są zerami, a wszystkie inne ciśnienia działają w kierunku stycznej do włókna, z którą się schodzi wiązka ciśnień.*

LEKCYA VIII

Równania ruchu i równowagi włókna. — Przypadki szczególne. — Zakończenie działu.

---

36. Równania ruchu i równowagi włókna. — Oznaczywszy kształt pracy mechanicznej jednostki elementu [VII, **34**] i główny charakter włókna [VII, **35**] przystępujemy do wyznaczenia warunków jego ruchu i równowagi. Szukajmy w tym celu przyrostu pracy mechanicznej tej części włókna (3) [VII, **33**] która jest ograniczoną dwoma przecięciami normalnemi ω' i ω''. Całka pojedyncza $\int dxh\omega\delta P$, rozumiejąc przez δP drugą stronę równania (7) [**34**], wzięta w granicach zmiennej x odpowiadających przecięciom ω' i ω'', jest oczywiście szukanym przyrostem, który także, za pomocą znanej metody całkowania przez części [II, **9**], przedstawić można jak następuje

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \int dx\,h\omega\delta P = \int dx \left\{ \frac{dh\omega N_1}{dx}\delta u + \frac{dh\omega T_3}{dx}\delta v + \frac{dh\omega T_2}{dx}\delta w \right\} \\ + h'\omega' \left\{ N'_1(\delta u)' + T'_3(\delta v)' + T'_2(\delta w)' \right\} \\ + h''\omega'' \left\{ N''_1(\delta u)'' + T''_3(\delta v)'' + T''_2(\delta w)'' \right\}; \end{aligned} \right.$$

ilości N'_1 i N''_1, T'_3 i T''_3, T'_2 i T''_2, $(\delta u)'$ i $(\delta u)''$, $(\delta v)'$ i $(\delta v)''$, (δw) i $(\delta w)''$ oznaczają tutaj wartości ciśnień N_1, T_3, T_2 i wartości funkcyj δu, δv, δw przypadające na granicach całkowania, a

$\frac{1}{h'}$ i $\frac{1}{h''}$ są dostawami kątów które normalne zewnętrzne do przecięć ω' i ω'' tworzą z osią $x^{\text{ów}}$.

Nazwijmy przez ρ gęstość włókna w punkcie M a przez X_0, Y_0, Z_0 składowe, według osi x, y, z, siły działającej na jednostkę jego massy w tym samym punkcie. Różnice

$$\rho\left(X_0 - \frac{d^2u}{dt^2}\right)dx\,h\omega\,, \quad \rho\left(Y_0 - \frac{d^2v}{dt^2}\right)dx\,h\omega\,, \quad \rho\left(Z_0 - \frac{d^2w}{dt^2}\right)dx\,h\omega$$

są jak wiadomo [II, **10**] równemi odpowiednim współczynnikom ilości δu, δv, δw pod całką pojedynczą w drugiej stronie równania (1). To daje, po opuszczeniu wspólnego czynnika dx,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dh\omega\,N_1}{dx} + \rho h\omega X_0 = \rho h\omega \frac{d^2u}{dt^2}\,,\\ &\frac{dh\omega\,T_3}{dx} + \rho h\omega Y_0 = \rho h\omega \frac{d^2v}{dt^2}\,,\\ &\frac{dh\omega\,T_2}{dx} + \rho h\omega Z_0 = \rho h\omega \frac{d^2w}{dt^2}\,, \end{aligned}\right.$$

równania ruchu w każdym punkcie włókna. Zastępując, w drugiem i w trzeciem z tych równań, ilości T_3 i T_2 przez drugie strony równań (11) [**34**], wykonywając następnie wskazane różniczkowania, uwzględniając pierwsze równanie (2) i dzieląc otrzymane wypadki przez $h\omega$, grupa (2) przechodzi na układ równań

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dh\omega\,N_1}{dx} + \rho h\omega X_0 = \rho h\omega \frac{d^2u}{dt^2}\,,\\ &N_1 \frac{d^2v}{dx^2} + \rho\left(Y_0 - X_0 \frac{dv}{dx}\right) = \rho\left(\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{d^2u}{dt^2}\frac{dv}{dx}\right),\\ &N_1 \frac{d^2w}{dx^2} + \rho\left(Z_0 - X_0 \frac{dw}{dx}\right) = \rho\left(\frac{d^2w}{dt^2} - \frac{d^2u}{dt^2}\frac{dw}{dx}\right). \end{aligned}\right.$$

Ponieważ mamy, podług (5) [**33**] i (15) [**35**]

$$(4) \qquad h\mathrm{N}_1 = \mathrm{T}\frac{dx}{ds}, \quad h\mathrm{T}_3 = \mathrm{T}\frac{dy}{ds}, \quad h\mathrm{T}_2 = \mathrm{T}\frac{dz}{ds},$$

współczynniki ilości $(\delta u)'$ i $(\delta u)''$, $(\delta v)'$ i $(\delta v)''$, $(\delta w)'$ i $(\delta w)''$, w drugiej stronie równania (1), są składowemi ciśnień, wywieranych na dwa krańcowe elementa ω' i ω'' uważanego włókna; nazywając je przez $\omega'\mathrm{X}'$ i $\omega''\mathrm{X}''$, $\omega'\mathrm{Y}'$ i $\omega''\mathrm{Y}''$, $\omega'\mathrm{Z}'$ i $\omega''\mathrm{Z}''$, jest oczywiście

$$(5) \quad \begin{cases} \mathrm{X}' = h'\mathrm{N}'_1 = \mathrm{T}'\left(\frac{dx}{ds}\right)', \quad \mathrm{Y}' = h'\mathrm{T}'_3 = \mathrm{T}'\left(\frac{dy}{ds}\right)', \\ \mathrm{Z}' = h'\mathrm{T}'_2 = \mathrm{T}'\left(\frac{dz}{ds}\right)', \\ \mathrm{X}'' = h''\mathrm{N}''_1 = \mathrm{T}''\left(\frac{dx}{ds}\right)'', \quad \mathrm{Y}'' = h''\mathrm{T}''_3 = \mathrm{T}''\left(\frac{dy}{ds}\right)'', \\ \mathrm{Z}'' = h''\mathrm{T}''_2 = \mathrm{T}''\left(\frac{dz}{ds}\right)'', \end{cases}$$

gdzie T' i T'' są ciśnieniami wywieranemi na jednostki przecięć ω' i ω'', a $\left(\frac{dx}{ds}\right)'$ i $\left(\frac{dx}{ds}\right)''$, $\left(\frac{dy}{ds}\right)'$ i $\left(\frac{dy}{ds}\right)''$, $\left(\frac{dz}{ds}\right)'$ i $\left(\frac{dz}{ds}\right)''$ są dostawami kątów, które normalne zewnętrzne tych przecięć tworzą z osiami współrzędnych.

W równaniach (3) i (5) należy jeszcze zastąpić ciśnienie N_1 przez pochodnę funkcyi P (13) [**34**] względem $\frac{du}{dx}$, to jest przez drugę stronę równania

$$\mathrm{N}_1 = \mathrm{F}'\left\{\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\}.$$

Podstawienie to zamienia równania (3), pierwszego rzędu względem N_1, na równania rzędu drugiego względem funkcyj u, v, w, podczas gdy równania (5) stają się tylko równaniami

rzędu pierwszego. Całki więc (u, v, w) równań rzędu drugiego (3) sprawdzać jeszcze powinny warunki rzędu pierwszego (5) na skrajnościach włókna. W wielu bardzo przypadkach oba końce włókna są nieruchomemi, wartości zatem całek u, v, w są na końcach krzywej (3) [**33**] zerami, a drugie strony równań (5) dają ciśnienia na jednostki przecięć ω' i ω'', które należy tam zrównoważyć ażeby pomieniony warunek otrzymać.

Z przyczyny równań (10) [**34**] funkcye

$$v = f_1(x, y, t), \qquad w = f_2(x, y, t)$$

przedstawiają równania krzywej przez środek włókna przechodzącej (*osi włókna*), a z tego powodu, po zcałkowaniu równań (3) nie znalibyśmy pierwotnego jej kształtu do którego się znalezione wartości funkcyj u, v, w odnoszą. Ażeby kształt ten oznaczyć, należy założyć równowagę założonego włókna t. j. zastąpić zerami drugie strony równań (3) lub (2). Wykonajmy to na równaniach (2), t. j. załóżmy

$$\frac{dh\omega N_1}{dx} + \rho h\omega X_0 = 0, \qquad \frac{dh\omega T_3}{dx} + \rho h\omega Y_0 = 0$$

$$\frac{dh\omega T_2}{dx} + \rho h\omega Z_0 = 0.$$

Podstawiając za hN_1, hT_3, hT_2 drugie strony równań (4) a za h wartość jego (5) [**33**], znajdujemy bardzo łatwo

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\omega T \frac{dx}{ds}}{ds} + \omega\rho X_0 = 0, \qquad \frac{d\omega T \frac{dy}{ds}}{ds} + \omega\rho Z_0 = 0, \\ &\frac{d\omega T \frac{dz}{ds}}{ds} + \omega\rho Z_0 = 0, \end{aligned} \right.$$

lub, po rozwinięciu,

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{d\omega T}{ds} + \omega T\,\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} + \omega\rho X_0 = 0,$$

$$\frac{dy}{ds}\frac{d\omega T}{ds}+\omega T\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}+\omega\rho Y_0=0,$$

$$\frac{dz}{ds}\frac{d\omega T}{ds}+\omega T\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}+\omega\rho Z_0=0.$$

Równania te pomnożone odpowiednio przez dx, dy, dz, i dodane stronami odpowiadającemi, dają, na mocy związków

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

$$\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds}=0,$$

summę

$$(7)\qquad d\omega T+\rho\omega(X_0dx+Y_0dy+Z_0dz)=0.$$

Równania (6) mogą służyć do rozwiązania dwóch zadań odwrotnych. Jeżeli kształt włókna jest znany, równania te dają, przez wyrugowanie T za pomocą równania (7), dwa warunki którym powinny zadosyć uczynić siły X_0, Y_0, Z_0 działające na massę, ażeby włókno było w równowadze; wprowadziwszy warunki te do różniczki (7) wyznaczymy natężenie T w każdym punkcie włókna, przez zcałkowanie jej w granicach danych. Jeżeli zaś przeciwnie, wiadome są siły X_0, Y_0, Z_0 w funkcyi x, y i z, równania (6) powinny wyznaczyć kształt włókna i prawa które rządzą natężeniem T w każdym jego punkcie. To drugie zadanie jest dla nas ważniejszem, albowiem znajdujemy w ten sposób kształt włókna, do którego się całki (u, v, w) równań (3) odnoszą.

37. Przypadki szczególne. — Jeżeli wszystkie punkta włókna poruszają się na płaszczyznach względem siebie równoległych, to biorąc ich kierunek za kierunek płaszczyzny

współrzędnych y, z, mamy oczywiście

$$u = 0, \quad N_1 = F'\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\} = \varphi\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\}$$

Lecz w takim razie funkcya $h\omega N_1$ zadosyć czyni równaniu

$$\frac{dh\omega N_1}{dx} + \rho h\omega X_0 = 0$$

które daje

$$N_1 = \frac{1}{h\omega}\left(k - \int h\omega X_0 dx\right),$$

rozumiejąc przez k ilość stałą która weszła z całkowania. Ztąd pokazuje się, że ciśnienie N_1 zależy rzeczywiście od ilości $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2$, z powodu wartości

$$h = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}.$$

Tak otrzymaną wartość N_1 należy podstawić w dwa pozostałe równania (3), co daje bardzo łatwo dwa jednoczesne równania

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2v}{dx^2}\left(k - \int h\omega X_0 dx\right) + \rho h\omega\left(Y_0 - X_0\frac{dv}{dx}\right) = \rho h\omega\frac{d^2v}{dt^2}, \\ &\frac{d^2w}{dx^2}\left(k - \int h\omega X_0 dx\right) + \rho h\omega\left(Z_0 - X_0\frac{dw}{dx}\right) = \rho h\omega\frac{d^2w}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

posiadające za całki szukane funkcye v i w.

38. Zakończenie Działu. — Przebiegłszy po kolei, najprzód ciała trzywymiarowe a następnie błony i włókna, t. j. ciała dwu i jednowymiarowe, zamykamy z końcem tego ustępu pierwszy dział naszego wykładu. Naturalny ten podział pod względem geometrycznym, usprawiedliwiliśmy także ze stanowiska mechanicznego, a wyniki które z tych badań wy-

padły charakteryzują go daleko lepiej, aniżeliby to można opowiedzieć najwymowniejszym nawet językiem. Zdaje się przeto że streszczanie tego działu byłoby zbytecznem. Lecz z drugiej strony, uważamy za rzecz ściśle z wykładem naszym związaną, zwrócić uwagę czytelnika na niektóre jego punkta, a mianowicie na te, które go głównie charakteryzują.

W ustępach zatytułowanych « *Główny charakter błony* [**29**] *i włókna* [**35**]» wykazaliśmy że powierzchnie tych ciał niedoznają żadnych ciśnień i że wszystkie pozostałe ciśnienia działają zawsze w płaszczyznie stycznej do błony, jeżeli to jest błona, lub w linii stycznej do włókna, jeżeli to jest włókno. Własności te, wraz z definicyami geometrycznemi błony i włókna, brano dotąd za punkt wyjścia w badaniach nad temi dwoma rodzajami ciał, i naturalnie, nie popełniano przez to żadnego błędu, albowiem prawa te charekteryzują je rzeczywiście. Lecz jeżeli nie popełniano błędu, wychodzono zato z zasady bardzo niejasnej. Ażeby kwestya ta mogła być łatwiejszą do zrozumienia, przypominamy, (na cośmy już wyżej [**17**] zwracali uwagę,) o różnicy pomiędzy ciśnieniem na element płaski i ciśnieniem na punkt przez który tenże element przechodzi.

Z określeń błony i włókna, dopiero co przytoczonych, wynika bezpośrednio, że oba te ciała zostają w równowadze tylko pod wpływem sił działających na ich massę i sił działających na brzegi błony lub na końce włókna, stosownie do przypadku w którym jesteśmy. Można jednak wyobrazić sobie, również w stanie równowagi, błonę ciężką wyciągniętą i znaczniej obciążoną w niektórych jej punktach, tudzież włókno ciężkie, stale w dwóch końcach umocowane, z pozawieszanemi gdzie niegdzie ciężarami. Znając tylko deflnicye geometryczne błony i włókna, trudnoby z tych zjawisk wywnioskować, że rzeczywiście powierzchnie będących w mowie ciał nie ulegają żadnym ciśnieniom; albowiem ciężary na nich pozawieszane posiadają na pierwszy rzut oka rolę bardzo dwóznaczną, t. j.

nie wiadomo, czy je brać za ciśnienia na elementa powierzchni błony lub włókna, czyteż za ciśnienia na punkta przez które te elementa przechodzą.

Dopiero gdy znamy mechaniczne określenia tych ciał, wiemy dobrze że elementa ich powierzchni nie ulegają żadnym ciśnieniom, a więc, że błona w kierunku swojej grubości a włókno w każdym kierunku przecięcia normalnego do swojej osi, niedoznają żadnych zmian t. j. zachowują w tych kierunkach charakter ciała sztywnego. Wtedy, poprowadziwszy w błonie powierzchnię środkową a we włóknie oś krzywą, należy ciężary, któremi obciążyliśmy te ciała, odnieść do punktów tej krzywej powierzchni lub linii, lub, co na jedno wychodzi, dodać ich składowe do pierwszych stron równań (15) [**30**] lub (2) [**36**]; ciężary te bowiem mogą się równoważyć tylko z ciśnieniami istniejącemi, a zatem z ciśnieniami wywiéranemi na puntka błony lub włókna, gdyż ciśnień działających na ich powierzchnie niema. Widzimy więc oczywiście, że biorąc za podstawę do określenia mechanicznego błony lub włókna spostrzeżenie, nie jesteśmy zbyt jaśni stawiając *a priori* to, cośmy nazwali *głównym ich charakterem*.

Dla tej przyczyny woleliśmy przyjąć, że błona jestto ciało, o dwóch wymiarach znaczniejszych i jednym bardzo małym, którego odkształcenia odnoszą się tylko do punktów jego środkowej powierzchni, a zatem w którém funkcye (u, v, w), odkształcenia te przedstawiające, zależąc jedynie od współrzędnych tych punktów, zawierają tylko dwie zmienne niezależne (x, y), albowiem trzecia zmienna (z) związana jest z poprzedzającemi przez równanie tej powierzchni.

Podobnie także przez włókno, rozumieliśmy ciało, o jednym wymiarze znaczniejszym i dwóch bardzo małych, którego odkształcenia przedstawiają funkcye (u, v, w) odnoszące się do jego krzywej osi i zawierające jednę tylko zmienną nie-

zależną (x), albowiem dwie pozostałe (y, z) zależą od poprzedzającej, za pomocą dwóch równań przedstawiających tęż oś.

Następnie, kierując się podobną metodą jak w ciałach trójwymiarowych, wzięliśmy za punkt wyjścia określenie pracy mechanicznej jednostki elementu błony i włókna, co nas doprowadziło nietylko do twierdzeń [**29**] i [**35**] ale jeszcze i do twierdzeń (**11**) [**28**] i (13) [**34**], jeżeli nie ważniejszych to przynajmniej równie im ważnych. Uważając bowiem błonę i włókno jako ciała zdefiniowane, należało oczywiście wykazać w jaki sposób warunki ich ruchu lub równowagi zależą od ich definicyi, a w jaki zależą od natury ciała z którego są utworzonemi. Wymienione twierdzenia (11) i (13) kwestyę tę w zupełności roztrzygają.

Oto są prawdziwe wypadki badań mechaniki cząsteczkowej, wypadki których można się było spodziewać i otrzymać, ale tylko za pomocą tej metody jakąśmy w tym celu zastosowali, t. j. metody opierającej się na pojęciu pracy mechanicznej.

Na tem kończymy dział pierwszy i zarazem ogólną teoryę mechaniki cząsteczkowej, z zamiarem jednak rozpoczęcia jej na nowo, wychodząc z innego punktu widzenia. Jużto, ażeby odkryć nowe prawdy których jeszcze nie poznaliśmy, jużto, ażeby dowieść powtórnie prawd znalezionych, już nareszcie, ażeby przedstawić równania ruchu lub równowagi pod kształtem dogodniejszym do rozwiązania pewnych szczególnych zadań, wypada jeszcze rozwiązać główne zadanie mechaniki cząsteczkowej we współrzędnych krzywokreślnych, których teorya nietylko że się ściśle wiąże z tą umiejętnością, ale nawet bierze w niej swój początek.

LEKCYA IX

Definicya powierzchni izostatycznych. — Początek współrzędnych krzywokreślnych. — Definicya niezmiennika i jego parametrów różniczkowych. — Zadanie współrzędnych krzywokreślnych. — Związki wynikające z prostopadłości. — Definicya geometryczna parametru różniczkowego pierwszego rzędu.

39. Definicya powierzchni izostatycznych. — Badając własności elipsoidy ciśnień, dowiedliśmy [V, **22**] że w każdym punkcie ciała istnieją zawsze trzy elementa płaskie, wzajemnie prostopadłe, na które wywierają się same tylko ciśnienia normalne, zwane ciśnieniami głównemi, i które stanowią jedyny układ posiadający tę własność, jeżeli trzy osie elipsoidy ciśnień są pomiędzy sobą różnemi.

Przypuśćmy że tak jest w całej przestrzeni ciała i że przechodząc po kolei od punktu do punktu elipsoida ciśnień, zawsze o trzech osiach nierównych, doznaje tylko bardzo małych zmian w ich wielkościach i kierunkach; w ten sposób wyjmujemy przypadki w którychby elipsoida ta była sferoidą lub kulą, jak również i te, w którychby doznawała zmian niециągłych, t. j. nagłych i znacznych. Ostatnie założenie może mieć zawsze miejsce w przypuszczeniu że materya jest ciągłą i że jako taka zastępuje tylko ciało, jeżeli się ono składa z cząsteczek pomiędzy sobą oddzielonych; to nie narzuca wcale żadnych szczególnych hipotez dotyczących praw odkształcania się ciała sposobem ciągłym.

Jeżeli wtenczas, począwszy od pewnego punktu ciała, przechodzimy, na jednym z elementów płaskich podległych ciśnieniom głównym, do innego punktu nieskończenie sąsiedniego, i jeżeli począwszy od tego nowego punktu kierujemy się ku trzeciemu położonemu na płaszczyznie głównej, pierwotnej lecz bardzo mało zbaczającej, t. j. na płaszczyznie głównej drugiego punktu, i tak następnie; można w ten sposób narysować powierzchnią ciągłą, rozdzielającą ciało na dwie części, wywierające na siebie same tylko ciśnienia normalne.

Ztąd bezpośrednio wynika, że uważając jednocześnie trzy elementa płaskie podległe ciśnieniom głównym i zmieniające swoje położenie sposobem ciągłym w całej przestrzeni ciała; wszystkie te trójki elementów tworzą trzy familie powierzchni do siebie prostopadłych, które Lamé nazywa *powierzchniami izostatycznemi*, i które są jedynemi z powierzchni w ciele ulegających samym tylko ciśnieniom normalnym. Nie należy zapominać że ciśnienia te są zarazem ciśnieniami głównemi, jakie w całej przestrzeni ciała istnieją.

40. Początek współrzędnych krzywokreślnych. — Łatwo jest także zauważyć że wszystkie układy izostatyczne rozdzielają przestrzeń ciała na elementa nieskończenie małe o krawędziach krzywych do siebie prostopadłych, będących elementami łuków wspólnych przecięć powierzchni izostatycznych, i o ścianach także krzywych będących elementami tychże powierzchni.

Każda z powierzchni izostatycznych jednego układu posiada swój parametr stały, zmienny od jednej powierzchni do drugiej w tej samej familii. Trzy parametry tworzą oczywiście układ współrzędnych, albowiem po nadaniu im wartości szczególnych, należą do trzech tylko powierzchni przecinających się prostokątnie w jednym punkcie (do jednego układu), który za pomocą tych wartości jest zupełnie wyznaczonym.

Zamiast układu powierzchni izostatycznych można wziąć układ trzech powierzchni do siebie prostopadłych, jakichkolwiek; w ten sposób przestrzeń ciała rozdziela się także na elementa krzywokreślne, o ścianach jednak nie ulegających ciśnieniom normalnym, jak to ma miejsce w układzie izostatycznym, ale ulegających ciśnieniom pochyłym. Tu jest początek współrzędnych krzywokreślnych, których zastosowanie w mechanice cząsteczkowej jest koniecznem, jeżeli chcemy traktować ciała kształtu danego.

Jakoż, we wszystkich prawie gałęziach tej umiejętności chodzi zawsze o wyznaczenie trzech funkcyj (u, v, w), sprawdzających trzy jednoczesne i cząstkowe równania drugiego rzędu w każdym punkcie ciała, i trzy jednoczesne i cząstkowe równania rzędu pierwszego na jego powierzchni. To podwójne całkowanie byłoby często niemożliwem do wykonania jeżeliby nie można było odnieść punktów ciała do takiego układu współrzędnych, w którym powierzchnia ciała lub każda z jej składowych części wyrażają się przez jedną z tych współrzędnych przyrównaną do ilości stałej. W ten tylko sposób można traktować prostościan za pomocą współrzędnych prostokątnych; walec prosty za pomocą współrzędnych biegunowych; kulę za pomocą współrzędnych kulistych; elipsoidę za pomocą współrzędnych eliptycznych i t. d.

41. Definicya niezmiennika i jego parametrów różniczkowych. — Przed rozpoczęciem nauki o współrzędnych krzywokreślnych, niektóre określenia są niezbędnemi.

Widzieliśmy wyżej [IV, **19**] że praca mechaniczna jednostki elementu $dxdydz$ jest niezmiennikiem sześciu ilości $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$; widzieliśmy także [IV, **18**], [V, **20**] że pochodne częściowe tejże pracy, t. j. ciśnienia N_i, T_i, jak również, i funkcye u, v, w, posiadają różne wartości w tym samym punkcie, jeżeli się

odnoszą do różnych położeń układu osi prostokątnych, gdy tenże porusza się około swojego początku.

A zatem, jeżeli u, v, w przedstawiają odkształcenia w danym punkcie ciała; jeżeli N_i, T_i oznaczają ciśnienia tam przypadające; i nareszcie, jeżeli P jest pracą mechaniczną jednostki elementu w tym samym punkcie; to, gdy wszystkie te ilości odnoszą się do układu współrzędnych prostokątnych, mającego tylko oznaczony początek, jedna z nich tylko funkcya P posiada wartosć jedyną i oznaczoną, podczas gdy pozostałe funkcye (N_i, T_i) i (u, v, w) posiadają różne wartości dla różnych położeń tego układu, t. j. wartości nioznaczone, albowiem położenie jego, z wyjątkiem początku, jest także nieoznaczoném.

Ztąd oczywiście wypada, że mając funkcyę F zależną od trzech współrzędnych (x, y, z) punktu odniesionego do osi prostokątnych o stałym tylko początku, należy się jeszcze pytać, czy funkcya ta posiada wartość oznaczoną w danym punkcie, czy też wartość jej zależy oprócz tego od położenia układu współrzędnych.

Otóż, nazwiemy *niezmiennikiem* taką tylko funkcyę F, która w każdym punkcie $M(x, y, z)$ i w każdém położeniu układu współrzędnych posiada wartość jedyną i oznaczoną.

Jeżeli F jest tak określonym niezmiennikiem, pochodne $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$ własności tej nie posiadają. Wyraziwszy bowiem niezmiennik F w nowych współrzędnych prostokątnych (x', y', z'), nowe pochodne $\left(\frac{dF}{dx'}, \frac{dF}{dy'}, \frac{dF}{dz'}\right)$ otrzymują się za pomocą dawnych $\left(\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}\right)$, różniczkując F jako funkcyę ilości x, y, z danych przez równania

$$x = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z',$$
$$y = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z',$$
$$z = p_1 x' + p_2 y' + p_3 z',$$

w których m_i, n_i, p_i oznaczają dostawy tablicy (6) [**18**]. To prowadzi do związków

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx'} = m_1\dfrac{dF}{dx} + n_1\dfrac{dF}{dy} + p_1\dfrac{dF}{dz}, \\[2ex] \dfrac{dF}{dy'} = m_2\dfrac{dF}{dx} + n_2\dfrac{dF}{dy} + p_2\dfrac{dF}{dz}, \\[2ex] \dfrac{dF}{dz'} = m_3\dfrac{dF}{dx} + n_2\dfrac{dF}{dy} + p_3\dfrac{dF}{dz}, \end{cases}$$

stwierdzających nasze założenie, i które także, podniesione do kwadratu i dodane stronami odpowiadającemi, dają, na mocy równań (8) [**18**], inny związek

$$\left(\frac{dF}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz'}\right)^2 = \left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2,$$

dowodzący, *że summa kwadratów z pochodnych niezmiennika* F, *jest również niezmiennikiem.*

Różniczkując powtórnie równania (1), pierwsze względem x'; drugie względem y'; trzecie względem z'; i uważając w tém różniczkowaniu pochodne $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$ za funkcye zmiennych x, y, z, danych przez te same jak poprzednio równania, znajdujemy bardzo łatwo

$$\frac{d^2F}{dx'^2} = m_1^2\frac{d^2F}{dx^2} + n_1^2\frac{d^2F}{dy^2} + p_1^2\frac{d^2F}{dz^2}$$

$$+ 2n_1p_1\frac{d^2F}{dydz} + 2p_1m_1\frac{d^2F}{dzdx} + 2m_1n_1\frac{d^2F}{dxdy},$$

$$\frac{d^2F}{dy'^2} = m_2^2\frac{d^2F}{dx^2} + n_2^2\frac{d^2F}{dy^2} + p_2^2\frac{d^2F}{dz^2}$$

$$+ 2n_2p_2\frac{d^2F}{dydz} + 2p_2m_2\frac{d^2F}{dzdx} + 2m_2n_2\frac{d^2F}{dxdy},$$

$$\frac{d^2F}{dz'^2} = m_3^2 \frac{d^2F}{dx^2} + n_3^2 \frac{d^2F}{dy^2} + p_3^2 \frac{d^2F}{dz^2}$$

$$+ 2n_3p_3 \frac{d^2F}{dydz} + 2p_3m_3 \frac{d^2F}{dzdx} + 2m_3n_3 \frac{d^2F}{dxdy},$$

a dodając stronami odpowiadającemi, mamy, na mocy związków (8) [**18**],

$$\frac{d^2F}{dx'^2} + \frac{d^2F}{dy'^2} + \frac{d^2F}{dz'^2} = \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2},$$

co dowodzi, *że summa trzech drugich pochodnych względem* x, y *i* z *niezmiennika* F *jest także niezmiennikiem.*

Rozumiejąc przez $\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$ nie wartość bezwzględną pierwiastku lecz wartość jego właściwą, założymy dla krótkości

$$\Delta^1 F = \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2},$$

$$\Delta^2 F = \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2},$$

i nazwiemy, wraz z Lamé'm, $\Delta^1 F$ *parametrem różniczkowym rzędu pierwszego, a* $\Delta^2 F$ *parametrem różniczkowym rzędu drugiego niezmiennika* F.

42. Zadanie współrzędnych krzywokreślnych. — Po tych uwagach wstępnych przystępujemy do określenia zadania współrzędnych krzywokreślnych. Niech będą trzy niezmienniki,

$$f_1(x, y, z), \quad f_2(x, y, z), \quad f_3(x, y, z),$$

zależne od trzech zmiennych (x, y, z) przedstawiających współrzędne prostokątne pewnego punktu M. Niezmienniki te posiadają wartości oznaczone i szczególne w każdym punkcie M;

oznaczając je przez α_1, α_2, α_3 mamy

$$(2)\quad \begin{cases} f_1(x,\ y,\ z) = \alpha_1, \\ f_2(x,\ y,\ z) = \alpha_2, \\ f_3(x,\ y,\ z) = \alpha_3, \end{cases}$$

i każdemu punktowi M(x, y, z) odpowiada jedyny układ wartości $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Równania (2) rozwiązane względem x, y i z, dają oczywiście

$$x = \varphi_1(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),$$

$$y = \varphi_2(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),$$

$$z = \varphi_3(\beta_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3);$$

każda więc funkcya zmiennych niezależnych x, y, z może się wyrazić jako funkcya zmiennych niezależnych $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Którebądź z równań (2),

$$(3)\quad f_i(x,\ y,\ z) = \alpha_i,$$

przedstawia powierzchnię o parametrze stałym α_i; zmieniając ten parametr otrzymujemy co raz inne powierzchnie, należące do tej samej familii.

A zatem, jakikolwiek punkt M oznaczony za pomocą współrzędnych x, y, z, lub za pomocą współrzędnych $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, jest w pierwszym razie wspólném przecięciem trzech płaszczyzn równoległych do płaszczyzn współrzędnych, w drugim zaś, jest wspólném przecięciem trzech powierzchni (2). Ztąd współrzędne $\alpha_1, \alpha_2\, \alpha_3$ nazywają się *krzywokreślnemi*.

Przejście od współrzędnych prostokreślnych do krzywokreślnych, sprowadza się oczywiście do zamiany zmiennych niezależnych x, y, z na zmienne niezależne $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; lecz jeżeli po-

wierzchnie (2) przecinają się wszędzie pod kątem prostym, działanie to może być znacznie uproszczoném, z powodu szczególnych własności które wtenczas powierzchnie te posiadają.

Warunek prostopadłości powierzchni (2) jest koniecznym, w celu jaki założyliśmy; powierzchnie bowiem izostatyczne, których prawa chcemy odnaleźć, przecinają się wszędzie pod kątem prostym i posiadają z tego powodu przedewszystkiem własności jakiegolwiek układu trzech familij powierzchni potrójnie prostopadłych.

Nauka więc o współrzędnych krzywokreślnych jest to po prostu geometrya, nie traktująca jednak własności bądź to jednej tylko krzywej linii, bądź to jednej tylko krzywej powierzchni, ale badająca od razu własności trzech familij powierzchni (2), przecinających się wszędzie pod kątem prostym i rozdzielających przestrzeń daną na prostościany krzywokreślne.

43. Związki wynikające z prostopadłości. — Powróćmy teraz do równań (2), które powinny przedstawiać trzy familie powierzchni wzajemnie prostopadłych. Stałość tej własności daje, pomiędzy pochodnemi niezmienników $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, pewne związki, zawierające wszystkie prawa, które mają być w tej nauce zbadanemi.

Płaszczyzna styczna, do jednej (3) z powierzchni (2), ma za równanie

$$(4) \qquad \frac{d\alpha_i}{dx}(X-x)+\frac{d\alpha_i}{dy}(Y-y)+\frac{d\alpha_i}{dz}(Z-z)=0,$$

rozumiejąc przez X, Y, Z współrzędne bieżące płaszczyzny, a przez x, y, z współrzędne punktu styczności.

Oznaczmy przez $h_i=\Delta^1\alpha_i$ parametr różniczkowy rzędu

pierwszego niezmiennika α_i, t. j. załóżmy

(5) $$h_i^2 = \left(\frac{d\alpha_i}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_i}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_i}{dz}\right)^2.$$

Wtedy normalna do powierzchni (3) tworzy z osiami x, y, z kąty, mające za dostawy

(6) $$m_i = \frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dx}, \quad n_i = \frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dd}, \quad p_i = \frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dz},$$

z których, zastępując po kolei znaczek i przez 1, 2, 3, otrzymujemy dostawy kątów, utworzonych z osiami x, y, z przez normalne do trzech powierzchni (2) we wspólnym punkcie M.

Kierunki tych normalnych można uważać za kierunki nowych osi współrzędnych prostokątnych (x', y', z') punktu M; wtedy tablica (6) [18] zamienia się na tablicę

(7)

	x'	y'	z'	
x	$\frac{1}{h_1}\frac{d\alpha_1}{dx}$	$\frac{1}{h_2}\frac{d\alpha_2}{dx}$	$\frac{1}{h_3}\frac{d\alpha_3}{dx}$	u
y	$\frac{1}{h_1}\frac{d\alpha_1}{dy}$	$\frac{1}{h_2}\frac{d\alpha_2}{dy}$	$\frac{1}{h_3}\frac{d\alpha_3}{dy}$	v
z	$\frac{1}{h_1}\frac{d\alpha_1}{dz}$	$\frac{1}{h_2}\frac{d\alpha_2}{dz}$	$\frac{1}{h_3}\frac{d\alpha_3}{dz}$	w
	U	V	W	

w której zastąpiliśmy także ilości u', v', w' przez U, V, W.

Ztąd wypada, że dostawy tablicy (7) podstawione za m_i, n_i, p_i, powinny sprawdzać związki (7) i (8) [18]. To daje najprzód trzy związki (5), zakładając po kolei $i=1$; $i=2$; $i=3$; następnie zaś znajdujemy

(8) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha_2}{dx}\frac{d\alpha_3}{dx} + \frac{d\alpha_2}{dy}\frac{d\alpha_3}{dy} + \frac{d\alpha_2}{dz}\frac{d\alpha_3}{dz} = 0, \\ &\frac{d\alpha_3}{dx}\frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{d\alpha_3}{dy}\frac{d\alpha_1}{dy} + \frac{d\alpha_3}{dz}\frac{d\alpha_1}{dz} = 0, \\ &\frac{d\alpha_1}{dx}\frac{d\alpha_2}{dx} + \frac{d\alpha_1}{dy}\frac{d\alpha_2}{dy} + \frac{d\alpha_1}{dz}\frac{d\alpha_2}{dz} = 0. \end{aligned}\right.$$

Formuły znowuż odwrotne (8) [**18**] prowadzą do równań

$$
(9)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right)^2+\frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right)^2+\frac{1}{h_3^2}\left(\frac{d\alpha_3}{dx}\right)^2=1,\\
&\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\alpha_1}{dy}\right)^2+\frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\alpha_2}{dy}\right)^2+\frac{1}{h_3^2}\left(\frac{d\alpha_3}{dy}\right)^2=1,\\
&\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d\alpha_1}{dz}\right)^2+\frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d\alpha_2}{dz}\right)^2+\frac{1}{h_3^2}\left(\frac{d\alpha_3}{dz}\right)^2=1;\\
&\frac{1}{h_1^2}\frac{d\alpha_1}{dy}\frac{d\alpha_1}{dz}+\frac{1}{h_2^2}\frac{d\alpha_2}{dy}\frac{d\alpha_2}{dz}+\frac{1}{h_3^2}\frac{d\alpha_3}{dy}\frac{d\alpha_3}{dz}=0,\\
&\frac{1}{h_1^2}\frac{d\alpha_1}{dz}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{1}{h_2^2}\frac{d\alpha_2}{dz}\frac{d\alpha_2}{dx}+\frac{1}{h_3^2}\frac{d\alpha_3}{dz}\frac{d\alpha_3}{dx}=0,\\
&\frac{1}{h_1^2}\frac{d\alpha_1}{dx}\frac{d\alpha_1}{dy}+\frac{1}{h_2^2}\frac{d\alpha_2}{dx}\frac{d\alpha_2}{dy}+\frac{1}{h_3^2}\frac{d\alpha_3}{dx}\frac{d\alpha_3}{dy}=0.
\end{aligned}\right.
$$

Pomiędzy związkami któreśmy otrzymali, jedyne tylko warunki (8) są wystarczającemi do wyrażenia prostopadłości powierzchni (2); związki bowiem (5) wynikają z określenia parametru różniczkowego pierwszego rzędu h_i, a związki (9) otrzymać można z (5) i (8).

44. Definicya geometryczna parametru różniczkowego pierwszego rzędu.—Jakkolwiek ilość h_i może się wyrażać (5) przez pochodne $\frac{d\alpha_i}{dx}$, $\frac{d\alpha_i}{dy}$, $\frac{d\alpha_i}{dz}$, ważnem jest jednak uważać ją oddzielnie za funkcyę bądź to współrzędnych prostokątnych x, y, z, bądź współrzędnych krzywokreślnych α_1, α_2, α_3. W ten sposób parametr różniczkowy pierwszego rzędu określa się geometrycznie, czego brakuje funkcyom $\frac{d\alpha_i}{dx}$, $\frac{d\alpha_i}{dy}$, $\frac{d\alpha_i}{dz}$.

Jakoż, oznaczając przez ds_i element normalnej do powierz-

chni (3) α_i, a przez dx, dy, dz rzuty tego elementu na osie współrzędnych x, y, z, mamy tożsamościowo

$$(10) \qquad \frac{dx}{ds_i} = \frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dx}, \quad \frac{dy}{ds_i} = \frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dy}, \quad \frac{dz}{ds_i} = \frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dz},$$

a następnie po wymnożeniu otrzymanych tak równań przez dx, dy, dz, i po dodaniu ich do siebie stronami odpowiadającemi, znajdujemy oczywiście

$$(11) \qquad ds_i = \frac{d\alpha_i}{h_i},$$

albowiem jest

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds_i$$

$$\frac{d\alpha_i}{dx}dx + \frac{d\alpha_i}{dy}dy + \frac{d\alpha_i}{dz}dz = d\alpha_i.$$

Związek ten daje $h_i = \frac{d\alpha_i}{ds_i}$; można zatem powiedzieć, *że w każdym punkcie powierzchni α_i parametr różniczkowy h_i jest granicą stosunku przyrostu parametru α_i do przyrostu normalnej ds_i, gdy się przechodzi po normalnej z powierzchni α_i do powierzchni nieskończenie blizkiej tej samej familii.*

LEKCYA X

Formuły i przekształcenia. — Parametry różniczkowe pierwszego i drugiego rzędu we współrzędnych krzywokreślnych. — Twierdzenie zasadnicze.

45. Formuły i przekształcenia. — Podstawiając wartość (11) ds_i [IX, **44**] w formułach (10) [**44**] znajdujemy bardzo łatwo równania

$$(1)\qquad \frac{dx}{d\alpha_i}=\frac{1}{h_i^2}\frac{d\alpha_i}{dx},\quad \frac{dy}{d\alpha_i}=\frac{1}{h_i^2}\frac{d\alpha_i}{dy},\quad \frac{dz}{d\alpha_i}=\frac{1}{h_i^2}\frac{d\alpha_i}{dz}$$

bardzo wielkiej użyteczności w przekształceniach.

Oznaczmy przez f jakąbądź funkcyę zmiennych x, y, z, którą można uważać bądź to za zależną od współrzędnych prostokątnych (x, y, z), bądź to jako funkcyę współrzędnych krzywokreślnych $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Za pomocą związków (1) znajdujemy trzy równania

$$\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{df}{dx}=h_i^2\frac{df}{dx}\frac{dx}{d\alpha_i},\quad \frac{d\alpha_i}{dx}\frac{df}{dx}=h_i^2\frac{df}{dy}\frac{dy}{d\alpha_i},\quad \frac{d\alpha_i}{dz}\frac{df}{dz}=h_i^2\frac{df}{dz}\frac{dz}{d\alpha_i},$$

które dodane stronami odpowiadającemi, dają oczywiście

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_i}{dx}\dfrac{df}{dx}+\dfrac{d\alpha_i}{dy}\dfrac{df}{dy}+\dfrac{d\alpha_i}{dz}\dfrac{df}{dz} \\ =h_i^2\left(\dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{d\alpha_i}+\dfrac{df}{dy}\dfrac{dy}{d\alpha_i}+\dfrac{df}{dz}\dfrac{dz}{d\alpha_i}\right)=h_i^2\dfrac{df}{d\alpha_i}. \end{cases}$$

Nazywając przez α_i i α_j dwa którebądź z trzech niezmienników $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, a przez λ jedną którąbądź z trzech ilości x, y, z; formuły (1) i (2) pozwalają wyznaczyć wartości pochodnych $\dfrac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_i}$ i $\dfrac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}$.

Jakoż, chcąc znaleźć pierwszą z nich to jest $\dfrac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_i}$, różniczkujmy równanie (5) [IX, **43**] względem ilości λ. To prowadzi do równania

$$\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{dx}+\frac{d\alpha_i}{dy}\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{dy}+\frac{d\alpha_i}{dz}\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{dz}=h_i\frac{dh_i}{d\lambda},$$

którego pierwsza strona różni się tém tylko od pierwszej strony równania (2), że zamiast funkcyi f stoi funkcya $\frac{d\alpha_i}{d\lambda}$. Z tego więc powodu jest oczywiście

$$\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{dx}+\frac{d\alpha_i}{dy}\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{dy}+\frac{d\alpha_i}{dz}\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{dz}=h_i^2\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha},$$

a następnie

$$\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_i}=\frac{1}{h_i}\frac{dh_i}{d\lambda},$$

lub rozwijając drugą stronę,

$$\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_i}=\frac{1}{h_i}\left(\frac{dh_i}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{d\lambda}+\frac{dh_i}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{d\lambda}+\frac{dh_i}{d\alpha_3}\frac{d\alpha_3}{d\lambda}\right); \tag{3}$$

ilość λ oznacza tutaj którąbądź ze współrzędnych x, y, z, a znak i którąbądź z trzech liczb 1, 2, 3.

Ażeby zaś znaleźć wartość pochodnej $\dfrac{d\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}$, należy wykonać podobne działanie z któremkolwiek z równań (8) [**43**]. Równanie to, na mocy przyjętej umowy, ma kształt następujący

$$\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d\alpha_j}{dx}+\frac{d\alpha_i}{dy}\frac{d\alpha_j}{dy}+\frac{d\alpha_i}{dz}\frac{d\alpha_j}{dz}=0,$$

a po zróżniczkowaniu go względem ilości λ daje

$$\left(\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d\dfrac{d\alpha_j}{d\lambda}}{dx}+\frac{d\alpha_i}{dy}\frac{d\dfrac{d\alpha_j}{d\lambda}}{dy}+\frac{d\alpha_i}{dz}\frac{d\dfrac{d\alpha_j}{d\lambda}}{dz}\right)$$

$$+\left(\frac{d\alpha_j}{dx}\frac{d\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}}{dx}+\frac{d\alpha_j}{dy}\frac{d\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}}{dy}+\frac{d\alpha_j}{dz}\frac{d\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}}{dz}\right)=0.$$

Oba nawiasy, w pierwszej stronie otrzymanego teraz równania posiadają kształt pierwszej strony równania (2), z której, ażeby otrzymać nawias pierwszy, należy tylko założyć $f=\dfrac{d\alpha_j}{d\lambda}$; i ażeby otrzymać nawias drugi, należy założyć $i=j$ i $f=\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}$. Dla tej przyczyny i na mocy drugiej strony równania (2), znajdujemy związek bardzo prosty

$$h_i^2\frac{d\dfrac{d\alpha_j}{d\lambda}}{d\alpha_i}+h_j^2\frac{d\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}=0. \tag{4}$$

Którebądź z równań (1) daje także

$$\frac{d\lambda}{d\alpha_i}=\frac{1}{h_i^2}\frac{d\alpha_i}{d\lambda},\quad \frac{d\lambda}{d\alpha_j}=\frac{1}{h_j^2}\frac{d\alpha_j}{d\lambda},$$

a z przyczyny tożsamości

$$\frac{d\dfrac{d\lambda}{d\alpha_i}}{d\alpha_j}=\frac{d\dfrac{d\lambda}{d\alpha_j}}{d\alpha_i},$$

mamy oczywiście

$$\frac{d\frac{1}{h_i^2}\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}=\frac{d\frac{1}{h_j^2}\frac{d\alpha_j}{d\lambda}}{d\alpha_i},$$

lub rozwijając

$$h_j^2\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}-h_i^2\frac{d\frac{d\alpha_j}{d\lambda}}{d\alpha_i}=\frac{2h_j^2}{h_i}\frac{dh_i}{d\alpha_j}\frac{d\alpha_i}{d\lambda}-\frac{2h_i^2}{h_j}\frac{dh_j}{d\alpha_i}\frac{d\alpha_j}{d\lambda}.$$

Związek ten, wraz z poprzedzającym (4), daje równanie

$$(5)\qquad \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}=\frac{1}{h_i}\frac{dh_i}{d\alpha_j}\frac{d\alpha_i}{d\lambda}-\frac{h_i^2}{h_j^3}\frac{dh_j}{d\alpha_i}\frac{d\alpha_j}{d\lambda},$$

którego druga strona przedstawia wartość pochodnej $\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}$, rozumiejąc przez λ którąbądź z trzech ilości x, y, z, a przez i, j którebądź dwie różne liczby z pomiędzy trzech 1, 2, 3.

Oznaczając przez λ i μ dwie którekolwiek z trzech ilości x, y, z łatwo jest znaleźć, za pomocą formuł (3) i (5), wyrażenie pochodnej $\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\mu}$.

Jakoż, nazwijmy przez k tę z liczb 1, 2, 3 która jest różną od dwóch i i j, i założmy

$$(6)\qquad \begin{cases} c_i=\frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{d\lambda}, & c_j=\frac{1}{h_j}\frac{d\alpha_j}{d\lambda}, \quad c_k=\frac{1}{h_k}\frac{d\alpha_k}{d\lambda}, \\ d_i=\frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{d\mu}, & d_j=\frac{1}{h_j}\frac{d\alpha_j}{d\mu}, \quad d_k=\frac{1}{h_k}\frac{d\alpha_k}{d\mu}. \end{cases}$$

Wtedy mamy także

$$\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\mu} = \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_i}\frac{d\alpha_i}{d\mu} + \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}\frac{d\alpha_j}{d\mu} + \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_k}\frac{d\alpha_k}{d\mu},$$

a na mocy (6)

$$(7)\qquad \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\mu} = h_i d_i \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_i} + h_j d_j \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j} + h_k d_k \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_k}.$$

Uwzględniając związki (6) w równaniach (3) i (5), jest również

$$\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_i} = c_i\frac{dh_i}{d\alpha_i} + c_j\frac{h_j}{h_i}\frac{dh_i}{d\alpha_j} + c_k\frac{h_k}{h_i}\frac{dh_i}{d\alpha_k},$$

$$\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j} = c_i\frac{dh_i}{d\alpha_j} - c_j\frac{h_i^2}{h_j^2}\frac{dh_j}{d\alpha_i}, \qquad \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_k} = c_i\frac{dh_i}{d\alpha_k} - c_k\frac{h_i^2}{h_k^2}\frac{dh_k}{d\alpha_i},$$

gdzie trzeci związek otrzymuje się z drugiego zastępując j przez k.

Ztąd druga strona równania (7) może się jeszcze przedstawić jak następuje

$$(8)\qquad \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\mu} = h_i\left\{\begin{array}{l}\frac{dh_i}{d\alpha_i}c_i d_i - \frac{h_i}{h_j}\frac{dh_j}{d\alpha_i}c_j d_j - \frac{h_i}{h_k}\frac{dh_k}{d\alpha_i}c_k d_k \\ + \frac{h_j}{h_i}\frac{dh_i}{d\alpha_j}(c_j d_i + c_i d_j) + \frac{h_k}{h_i}\frac{dh_i}{d\alpha_k}(c_k d_i + c_i d_k)\end{array}\right\},$$

co daje równanie symetryczne względem j i k, a więc z którego otrzymamy $\frac{d\frac{d\alpha_1}{d\lambda}}{d\mu}$, $\frac{d\frac{d\alpha_2}{d\lambda}}{d\mu}$, $\frac{d\frac{d\alpha_3}{d\lambda}}{d\mu}$, zakładając po kolei $i=1$; $i=2$; $i=3$ i zastępując odpowiednio pozostałe znaczki j, k przez 2, 3; 3, 1; 1, 2. Równanie to jest również symetryczném względem c i d, jak być powinno, albowiem jest

tożsamościowo

$$\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\mu}=\frac{d\frac{d\alpha_i}{d\mu}}{d\lambda}.$$

Zakładając $\mu=\lambda$, jest także $d=c$ i równanie (8) zamienia się na następujące

$$(9)\qquad \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\lambda}=h_i\left\{\begin{matrix}\frac{dh_i}{d\alpha_i}c_i^2-\frac{h_i}{h_j}\frac{dh_j}{d\alpha_i}c_j^2-\frac{h_i}{h_k}\frac{dh_k}{d\alpha_i}c_k^2\\ +\frac{2h_j}{h_i}\frac{dh_i}{d\alpha_j}c_ic_j+\frac{2h_k}{h_i}\frac{dh_i}{d\alpha_k}c_ic_k\end{matrix}\right\}.$$

Formuły (8) i (9) posiadają ważną rolę w zamianie zmiennych prostokątnych (x, y, z) na zmienne krzywokreślne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

46. Parametry różniczkowe pierwszego i drugiego rzędu we współrzędnych krzywokreślnych. — Należałoby jeszcze otrzymać inne wnioski z formuł (3) i (5), na mocy których warunki prostopadłości powierzchni (2) [IX, **42**] tłumaczą się zręcznie sposobem geometrycznym, dając bardzo proste wyrażenia krzywości tych powierzchni. Lecz nim do tego przyjdziemy chcemy dać pierwej zastosowanie formuły (9) do znalezienia wyrażeń parametrów Δ^1F i Δ^2F we współrzędnych krzywokreślnych, wyrażeń, które są także ważnemi i które będą miały częste zastosowania w dalszym ciągu niniejszego wykładu.

Niezmiennik F uważać zawsze można jako funkcyę współrzędnych prostokątnych (x, y, z), lub jako funkcyę współrzędnych krzywokreślnych $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Oznaczjąc, jak wyżej, przez λ którąbądź z ilości x, y, z, mamy na tej zasadzie

$$(10)\qquad \frac{dF}{d\lambda}=\frac{dF}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{d\lambda}+\frac{dF}{d\alpha_2}\frac{d\alpha_2}{d\lambda}+\frac{dF}{d\alpha_3}\frac{d\alpha_3}{d\lambda},$$

a podnosząc obie strony do kwadratu, znajdujemy

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha_1}{d\lambda}\right)^2 \left(\frac{dF}{d\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{d\lambda}\right)^2 \left(\frac{dF}{d\alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{d\lambda}\right)^2 \left(\frac{dF}{d\alpha_3}\right)^2$$

$$+ 2\frac{d\alpha_2}{d\lambda}\frac{d\alpha_3}{d\lambda}\frac{dF}{d\alpha_2}\frac{dF}{d\alpha_3} + 2\frac{d\alpha_3}{d\lambda}\frac{d\alpha_1}{d\lambda}\frac{dF}{d\alpha_3}\frac{dF}{d\alpha_1} + 2\frac{d\alpha_1}{d\lambda}\frac{d\alpha_2}{d\lambda}\frac{dF}{d\alpha_1}\frac{dF}{d\alpha_2}.$$

Równanie to przedstawia właściwie trzy różne równania, z których każde otrzymuje się zakładając po kolei $\lambda = x$; $\lambda = y$; $\lambda = z$.

Tak otrzymane równania dodane do siebie stronami odpowiadającemi, dają na pierwszej stronie $(\Delta^1 F)^2$, na mocy definicyi $\Delta^1 F$; na drugiej zaś stronie dają, na mocy związków (5) i (8) [IX, **43**], drugą stronę równań

$$(11) \qquad (\Delta^1 F)^2 = \begin{cases} = h_1^2\left(\frac{dF}{d\alpha_1}\right)^2 + h_2^2\left(\frac{dF}{d\alpha_2}\right)^2 + h_3^2\left(\frac{dF}{d\alpha_3}\right)^2, \\ = \left(\frac{dF}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{ds_2}\right)^2 + \left(\frac{dF}{ds_3}\right)^2, \end{cases}$$

albowiem jest także [IX, **44**, (11)] $h_i ds_i = d\alpha_i$.

Ażeby zaś znaleźć wyrażenie parametru różniczkowego $\Delta^2 F$, różniczkjumy jeszcze raz obie strony równania (10) względem ilości λ. To daje

$$(12) \qquad \begin{cases} \frac{d^2F}{d\lambda^2} = \left(\frac{d\alpha_1}{d\lambda}\right)^2 \frac{d^2F}{d\alpha_1^2} + \left(\frac{d\alpha_2}{d\lambda}\right)^2 \frac{d^2F}{d\alpha_2^2} + \left(\frac{d\alpha_3}{d\lambda}\right)^2 \frac{d^2F}{d\alpha_3^2} \\ + 2\frac{d\alpha_2}{d\lambda}\frac{d\alpha_3}{d\lambda}\frac{d^2F}{d\alpha_2 d\alpha_3} + 2\frac{d\alpha_3}{d\lambda}\frac{d\alpha_1}{d\lambda}\frac{d^2F}{d\alpha_3 d\alpha_1} + 2\frac{d\alpha_1}{d\lambda}\frac{d\alpha_2}{d\lambda}\frac{d^2F}{d\alpha_1 d\alpha_2} \\ + \frac{dF}{d\alpha_1}\frac{d\frac{d\alpha_1}{d\lambda}}{d\lambda} + \frac{dF}{d\alpha_2}\frac{d\frac{d\alpha_2}{d\lambda}}{d\lambda} + \frac{dF}{d\alpha_3}\frac{d\frac{d\alpha_3}{d\lambda}}{d\lambda}. \end{cases}$$

Każdą z pochodnych $\frac{d\frac{d\alpha_1}{d\lambda}}{d\lambda}$, $\frac{d\frac{d\alpha_2}{d\lambda}}{d\lambda}$, $\frac{d\frac{d\alpha_3}{d\lambda}}{d\lambda}$, daje formuła (9)

zakładając po kolei : $i=1$, $j=2$, $k=3$; $i=2$, $j=3$, $k=1$; $i=3, j=1, k=2$:

$$
(13)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\dfrac{d\alpha_1}{d\lambda}}{d\lambda} &= h_1 \left\{ \begin{aligned} &\frac{dh_1}{d\alpha_1}c_1^2 - \frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_1}c_2^2 - \frac{h_1}{h_3}\frac{dh_3}{d\alpha_1}c_3^2 \\ &+ \frac{2h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\alpha_2}c_1c_2 + \frac{2h_3}{h_1}\frac{dh_1}{d\alpha_3}c_3c_1 \end{aligned} \right\} \\
\frac{d\dfrac{d\alpha_2}{d\lambda}}{d\lambda} &= h_2 \left\{ \begin{aligned} &\frac{dh_2}{d\alpha_2}c_2^2 - \frac{h_2}{h_3}\frac{dh_3}{d\alpha_1}c_3^2 - \frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\alpha_2}c_1^2 \\ &+ \frac{2h_3}{h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_3}c_2c_3 + \frac{2h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_1}c_1c_2 \end{aligned} \right\} \\
\frac{d\dfrac{d\alpha_3}{d\lambda}}{d\lambda} &= h_3 \left\{ \begin{aligned} &\frac{dh_3}{d\alpha_3}c_3^2 - \frac{h_3}{h_1}\frac{dh_1}{d\alpha_3}c_1^2 - \frac{h_3}{h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_3}c_2^2 \\ &+ \frac{2h_1}{h_3}\frac{dh_3}{d\alpha_1}c_3c_1 + \frac{2h_2}{h_3}\frac{dh_3}{d\alpha_1}c_2c_3 \end{aligned} \right\}
\end{aligned}
\right.
$$

Równanie (12), przekształcone za pomocą związków (13), stanowi właściwie trzy równania, z których każde otrzymuje się zastępując ilość λ przez x, y, z i odpowiednio ilość c przez m, n, p. Summa tak otrzymanych równań, wypadła z dodania ich stronami odpowiadającemi, podzielona przez $h_1 h_2 h_3$, daje na pierwszej stronie wyraz $\dfrac{\Delta^2 F}{h_1 h_2 h_3}$, na mocy definicyi $\Delta^2 F$; na drugiej zaś stronie daje, na mocy związków (7) [IV, **18**], drugą stronę następującego równania

$$
\frac{\Delta^2 F}{h_1 h_2 h_3} = \left\{
\begin{aligned}
&\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{d^2 F}{d\alpha_1^2} + \frac{dF}{d\alpha_2}\left(\frac{1}{h_2 h_3}\frac{dh_1}{d\alpha_1} - \frac{h_1}{h_2^2 h_3}\frac{dh_2}{d\alpha_1} - \frac{h_1}{h_2 h_3^2}\frac{dh_3}{d\alpha_1}\right) \\
&+ \frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{d^2 F}{d\alpha_2^2} + \frac{dF}{d\alpha_1}\left(\frac{1}{h_3 h_1}\frac{dh_2}{d\alpha_2} - \frac{h_2}{h_3^2 h_1}\frac{dh_3}{d\alpha_2} - \frac{h_2}{h_3 h_1^2}\frac{dh_1}{d\alpha_2}\right) \\
&+ \frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{d^2 F}{d\alpha_3^2} + \frac{dF}{d\alpha_3}\left(\frac{1}{h_1 h_2}\frac{dh_3}{d\alpha_3} + \frac{h_3}{h_1^2 h_2}\frac{dh_1}{d\alpha_3} + \frac{h_3}{h_1 h_2^2}\frac{dh_2}{d\alpha_3}\right)
\end{aligned}
\right\}.
$$

Zważywszy że współczynniki ilości $\frac{dF}{d\alpha_1}, \frac{dF}{d\alpha_2}, \frac{dF}{d\alpha_3}$ są odpowiednio rozwinięciami pochodnych $\frac{d\frac{h_1}{h_2h_3}}{d\alpha_1}, \frac{d\frac{h_2}{h_3h_1}}{d\alpha_2}, \frac{d\frac{h_3}{h_1h_2}}{d\alpha_3}$, równanie dopiero co otrzymane zastąpić jeszcze można przez równanie

$$(14)\qquad \Delta^2 F = h_1h_2h_3\left(\frac{d\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{dF}{d\alpha}}{d\alpha_1}+\frac{d\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{dF}{d\alpha_2}}{d\alpha_2}+\frac{d\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{dF}{d\alpha_3}}{d\alpha_3}.\right),$$

którego druga strona przedstawia godne uwagi wyrażenie parametru różniczkowego drugiego rzędu Δ^2F we współrzędnych krzywokreślnych $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Zakładając $F = \alpha_1$, jest $\frac{dF}{d\alpha_1} = 1$, a z powodu że ilości α_1, α_2 α_3 są pomiędzy sobą niezależnemi, mamy także

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}=0,\quad \frac{d\alpha_3}{d\alpha_1}=0.$$

Równanie zatem (14) zamienia się na pierwsze z równań

$$(15)\qquad \begin{cases} \Delta^2\alpha_1 = h_1h_2h_2\dfrac{d\frac{h_1}{h_2h_3}}{d\alpha_1}, \\ \Delta^2\alpha_2 = h_1h_2h_3\dfrac{d\frac{h_2}{h_3h_1}}{d\alpha_2}, \\ \Delta^2\alpha_3 = h_1h_2h_3\dfrac{d\frac{h_3}{h_1h_2}}{d\alpha_3}. \end{cases}$$

z których dwa drugie otrzymują się zakładając odpowiednio $F = \alpha_2$; $F = \alpha_3$.

47. Twierdzenie zasadnicze. — Powracamy teraz do równania (5), którego obie strony pomnożone, raz przez $\frac{d\alpha_i}{d\lambda}$; drugi raz przez $\frac{d\alpha_j}{d\lambda}$; trzeci raz przez $\frac{d\alpha_k}{d\lambda}$, dają trzy następujące równości:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}\dfrac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}=\dfrac{1}{h_i}\dfrac{dh_i}{d\alpha_j}\left(\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}\right)^2-\dfrac{h_i^2}{h_j^3}\dfrac{dh_j}{d\alpha_i}\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}\dfrac{d\alpha_j}{d\lambda}; \\[2ex] \dfrac{d\alpha_j}{d\lambda}\dfrac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}=\dfrac{1}{h_i}\dfrac{dh_i}{d\alpha_j}\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}\dfrac{d\alpha_j}{d\lambda}-\dfrac{h_i^2}{h_j^3}\dfrac{dh_j}{d\alpha_i}\left(\dfrac{d\alpha_j}{d\lambda}\right)^2; \\[2ex] \dfrac{d\alpha_k}{d\lambda}\dfrac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j}=\dfrac{1}{h_i}\dfrac{dh_i}{d\alpha_j}\dfrac{d\alpha_k}{d\lambda}\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}-\dfrac{h_i^2}{h_j^3}\dfrac{dh_j}{d\alpha_i}\dfrac{d\alpha_j}{d\lambda}\dfrac{d\alpha_k}{d\lambda}. \end{cases}$$

Zastępując w pierwszej z nich ilość λ przez x; y; z i dodając otrzymane w ten sposób trzy równania stronami odpowiadającemi, znajdujemy, na mocy związków (5) i (8) [**43**], równanie

$$\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d\frac{d\alpha_i}{dx}}{d\alpha_j}+\frac{d\alpha_j}{dy}\frac{d\frac{d\alpha_i}{dy}}{d\alpha_j}+\frac{d\alpha_j}{dz}\frac{d\frac{d\alpha_i}{dz}}{d\alpha_j}=h_i\frac{dh_i}{d\alpha_j},$$

które także otrzymać można było, różniczkując obie strony równania (5) [**43**] względem parametru α_j.

Zamieniwszy następnie w drugiej z równości (16) ilość λ na x, na y i na z, i zsumowawszy otrzymane ztąd wypadki stronami odpowiadającemi, wypada także na mocy związków (5) i (8) [**43**], formuła następująca

$$\frac{d\alpha_j}{dx}\frac{d\frac{d\alpha_i}{dx}}{d\alpha_j}+\frac{d\alpha_i}{dy}\frac{d\frac{d\alpha_i}{dy}}{d\alpha_j}+\frac{d\alpha_i}{dz}\frac{d\frac{d\alpha_i}{dz}}{d\alpha_j}=-\frac{h_i^2}{h_j}\frac{dh_i}{d\alpha_i}.$$

Lecz jeżeli powtórzymy te same działania z trzecią z równo-

ści (16) otrzymamy wtedy, na mocy równań (8) [43], formułę różną od dwóch poprzédnich,

$$(17) \qquad \frac{d\alpha_k}{dx}\frac{d\frac{d\alpha_i}{dx}}{d\alpha_j}+\frac{d\alpha_k}{dy}\frac{d\frac{d\alpha_i}{dy}}{d\alpha_j}+\frac{d\alpha_k}{dz}\frac{d\frac{d\alpha_i}{dz}}{d\alpha_j}=0,$$

w której, przypominamy umyślnie, trzy znaczki i, j, k są koniecznie różnemi, i która stanowi twierdzenie bardzo wielkiego znaczenia, w teoryi trzech familij powierzchni wzajemnie prostopadłych.

LEKCYA XI

Definicya linii krzywości i warunek ażeby kierunek styczny do powierzchni był jej kierunkiem. — Twierdzenie Dupin'a. — Krzywość powierzchni. — Wyrażenia sześciu krzywości — Zastosowanie do układu kulistego.

48. Definicya linii krzywości i warunek ażeby kierunek styczny do powierzchni był jej kierunkiem. — Badania które rozpoczynamy mają doprowadzić do wyznaczenia krzywości powierzchni potrójnie prostopadłych; celu jednak tego nie moglibyśmy osiągnąć, nie obeznawszy się przedtem z definicyą linij krzywości i ze szczególnemi ich własnościami, które posiadają, gdy należą do trzech familij powierzchni przecinających się prostokątnie.

Niech równanie [IX, **42**, (3)]

$$f_i(x, y, z) = \alpha_i$$

przedstawia jedną z powierzchni współrzędnych, którą uważajmy tymczasem jako powierzchnię jakąkolwiek (*). Na po-

(*) Nie należy sądzić ażeby mając daną jednę jakąkolwiek familję powierzchni, istniały zawsze dwie inne familie mogące tworzyć z pierwszą układ potrójnie prostokątny. Przypadek ten istnieje tylko wtenczas kiedy się spełniają pewne warunki. Zanadto oddalilibyśmy się od głównego celu zapuszczając się w ich badania, lecz zwracamy uwagę na ich ważność, szczególnie w mechanice cząsteczkowej, gdzie układ powierzchni izostatycznych, jako potrójnie prostokątny, warunkom tym zawsze zadosyć czynić powinien.

Jeżeli okoliczności pozwolą, umieścimy na końcu dzieła w *przypisach*

wierzchni tej narysujmy linię krzywą i poprowadźmy przez wszystkie punkta tej krzywej proste, normalne do powierzchni. Jeżeli miejscem pomienionych prostych jest powierzchnia rozwijalna, wtedy narysowana krzywa nazywa się *linią krzywości*.

Z określénia tego wypada, że każde dwie proste, normalne do powierzchni α_i, poprowadzone w punktach jej linii krzywości, bezpośrednio po sobie następujących, przecinają się w *środku krzywości* przecięcia jej normalnego poprowadzonego stycznie do linii krzywości. Wiadomo z geómetryi że przecięcie to jest *przecięciem główném*, miejscem zaś środków krzywości jest *krawędź zwrotu* powierzchni rozwijalnej.

Oznaczając przez x', y', z' współrzędne bieżące normalnej do powierzchni α_i w punkcie M (x, y, z), równania tej prostej otrzymują się porównywając równe sobie stosunki

$$(1) \qquad \frac{\frac{d\alpha_i}{dx}}{x'-x} = \frac{\frac{d\alpha_i}{dy}}{y'-y} = \frac{\frac{d\alpha_i}{dz}}{z'-z} = \frac{h_i}{r_{i,j}},$$

w których

$$h_i^2 = \left(\frac{d\alpha_i}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_i}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_i}{dz}\right)^2,$$

$$r^2_{i,j} = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2.$$

Jeżeliby ilości x', y', z' były współrzędnemi środka krzywo-

---

ważniejsze uwagi dotyczące tego przedmiotu; teraz jednak odsyłamy czytelnika do innych prac w tym rodzaju jako to: p. Bouquét w dzienniku p. Liouville'a (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*. Tome XI, 2e série); p. Serret, w tomie XII tego samego dziennika; p. Maurice Lévy w dzienniku Szkoły Politechnicznej paryzkiej (*Journal de l'école impériale polytechnique*. Cahier 43, tome XXVI); p. M. A. Cayley w Sprawozdaniach Akademii Umiejętności w Paryżu. (*Comptes rendus*, etc. T. LXXV, 1872).

ści przecięcia głównego w punkcie M (x, y, z), wtenczas ilość $r_{i,j}$ przedstawiałaby *promień* tejże krzywości, a równania (1) przestałyby być równaniami normalnej do powierzchni α_i, lecz wyrażałyby tylko warunek, że prosta ta przechodzi przez punkt M i przez środek krzywości przecięcia głównego w tym punkcie.

To założywszy, nazwijmy przez $\delta_j x$, $\delta_j y$, $\delta_j z$ rzuty elementu linii krzywości na osie x, y, z, a zatem, przez

$$x+\delta_j x,\quad y+\delta_j y,\quad z+\delta_j z$$

współrzędne drugiego jego końca. Ażeby wyrazić że prosta normalna w tym nowym punkcie do powierzchni α_i, przechodzi także przez środek krzywości przecięcia głównego, należy w równaniach (1) zastąpić odpowiednio ilości x, y, z przez $x+\delta_j x$, $y+\delta_j y$, $z+\delta_j z$. Równania te doznają wtedy pewnych zmian, podczas których, ilości x', y', z', jako współrzędne środka krzywości, i $r_{i,j}$, jako promień tejże krzywości, zachowują wartości stałe.

Różniczkując w tem założeniu równania (1), lub lepiej ich logarytmy, znajdziemy oczywiście

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\delta_j \dfrac{d\alpha_i}{dx}}{\dfrac{d\alpha_i}{dx}} + \frac{\delta_j x}{x'-x} = \\ &\frac{\delta_j \dfrac{d\alpha_i}{dy}}{\dfrac{d\alpha_i}{dy}} + \frac{\delta_j y}{y'-y} = \\ &\frac{\delta_j \dfrac{d\alpha_i}{dz}}{\dfrac{d\alpha_i}{dz}} + \frac{\delta_j z}{z'-z} = \end{aligned}\right\} = \frac{\delta_j h_i}{h_i};$$

a przez wyrugowanie pięciu ilości $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, $\frac{h_i}{r_{i,j}}$, $\frac{\lambda_j h_i}{h_i}$ z sześciu równań (1) i (2), otrzymamy na wypadek jedno równanie różniczkowe, wyrażające, że dwie proste normalne do powierzchni α_i, poprowadzone w dwóch końcach elementu jej linii krzywości, przecinają się. Ponieważ te proste wyznaczają położenie płaszczyzny stycznej do powierzchni rozwijalnej przecinającej się z powierzchnią α_i podług linii krzywości, równanie wypadkowe wyraża z tej przyczyny pomieniony warunek; a zatem, uważane razem z równaniem różniczkowem powierzchni α_i, przedstawia równanie różniczkowe linii krzywości.

Wykonywając pomienione rugowanie, zastąpmy najprzód w równaniach (2) ilości $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, przez wartości ich z równań (1). To daje trzy równania

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \delta_j\frac{d\alpha_i}{dx} &= \frac{\delta_j h_i}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dx} - \frac{h_i}{r_{i,j}}\delta_j x \\ \delta_j\frac{d\alpha_i}{dy} &= \frac{\delta_j h_i}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dy} - \frac{h_i}{r_{i,j}}\delta_j y, \\ \delta_j\frac{d\alpha_i}{dz} &= \frac{\delta_j h_i}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dz} - \frac{h_i}{r_{i,j}}\delta_j z, \end{aligned}\right.$$

zawierające jeszcze dwie do wyrugowania ilości: $\frac{\delta_i h_j}{h_i}$ i $\frac{h_i}{r_{i,j}}$.

Pomnóżmy w tym celu i odpowiednio równania (3) przez ilości, jeszcze nieoznaczone, $\delta_k x$, $\delta_k y$, $\delta_k z$ i dodajmy je stronami odpowiadającemi. Jako wypadek tego działania znajdujemy jedno równanie

$$\delta_k x\,.\,\delta_j\frac{d\alpha_i}{dx} + \delta_k y\,.\,\delta_j\frac{d\alpha_i}{dy} + \delta_k z\,.\,\delta_j\frac{d\alpha_i}{dz}$$

$$= \frac{\delta_j h_i}{h_i}\left(\frac{d\alpha_i}{dx}\delta_k x + \frac{d\alpha_i}{dy}\delta_k y + \frac{d\alpha_i}{dz}\delta_k z\right) - \frac{h_i}{r_{i,j}}(\delta_j x\delta_k x + \delta_j y\delta_k y + \delta_j z\delta_k z),$$

mające być niezależnem od $\frac{\delta_j h_i}{h_i}$ i $\frac{h_i}{r_{i,j}}$.

Warunkowi temu staje się zadość zakładając

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{d\alpha_i}{dx}\delta_k x + \frac{d\alpha_i}{dy}\delta_k y + \frac{d\alpha_i}{dz}\delta_k z = 0, \\ \delta_j x \delta_k x + \delta_j y \delta_k y + \delta_j z \delta_k z = 0; \end{cases}$$

zkąd wynika, że równaniem wypadkowem jest równanie

$$(5)\quad \delta_k x . \delta_j \frac{d\alpha_i}{dx} + \delta_k y . \delta_j \frac{d\alpha_i}{dy} + \delta_k z . \delta_j \frac{d\alpha_i}{dz} = 0,$$

w którem ilości $\delta_k x$, $\delta_k y$, $\delta_k z$, dotąd nieoznaczone, sprawdzają teraz związki (4).

Podług tych związków, punkt mający za współrzędne

$$x + \delta_k x,\ y + \delta_k y,\ z + \delta_k z$$

znajduje się na powierzchni α_i, a element krzywy leżący także na tej powierzchni i mający za rzuty ilości $\delta_k x$, $\delta_k y$, $\delta_k z$, jest prostopadłym do kierunku linii krzywości.

Układ liniowy (4) daje bardzo łatwo

$$\delta_k x = \mathrm{K}\left(\frac{d\alpha_i}{dz}\delta_j y - \frac{d\alpha_i}{dy}\delta_j z\right),$$

$$\delta_k y = \mathrm{K}\left(\frac{d\alpha_i}{dx}\delta_j z - \frac{d\alpha_i}{dz}\delta_j x\right);$$

$$\delta_k z = \mathrm{K}\left(\frac{d\alpha_i}{dy}\delta_j x - \frac{d\alpha_i}{dx}\delta_j y\right),$$

gdzie

$$\mathrm{K}^2 = \frac{\delta_k x^2 + \delta_k y^2 + \delta_k z^2}{\left(\frac{d\alpha_i}{dz}\delta_j y - \frac{d\alpha_i}{dy}\delta_j z\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_i}{dx}\delta_j z - \frac{d\alpha_i}{dz}\delta_j x\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_i}{dy}\delta_j x - \frac{d\alpha_i}{dx}\delta_j y\right)^2}.$$

Dla tej przyczyny, po rozwinięciu ilości

$$\delta_j \frac{d\alpha_i}{dx} = \frac{d^2\alpha_i}{dx^2}\delta_j x + \frac{d^2\alpha_i}{dxdy}\delta_j y + \frac{d^2\alpha_i}{dzdx}\delta_j z,$$

$$\delta_j \frac{d\alpha_i}{dy} = \frac{d^2\alpha_i}{dxdy}\delta_j x + \frac{d^2\alpha_i}{dy^2}\delta_j y + \frac{d^2\alpha_i}{dydz}\delta_j z,$$

$$\delta_j \frac{d\alpha_i}{dz} = \frac{d^2\alpha_i}{dzdx}\delta_j x + \frac{d^2\alpha_i}{dydz}\delta_j y + \frac{d^2\alpha_i}{dz^2}\delta_j z,$$

i po zastąpieniu ich w równaniu (5) znalezionemi teraz wartościami, tudzież, po zastąpieniu ilości $\delta_k x$, $\delta_k y$, $\delta_k z$ wartościami ich z równań (4); znajdujemy bardzo łatwo

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d\alpha_i}{dy}\frac{d^2\alpha_i}{dzdx} - \frac{d\alpha_i}{dz}\frac{d^2\alpha_i}{dxdy}\right)\delta_j x^2 \\
+&\left\{\frac{d\alpha_i}{dz}\frac{d^2\alpha_i}{dzdx} - \frac{d\alpha_i}{dy}\frac{d^2\alpha_i}{dxdy} + \frac{d\alpha_i}{dx}\left(\frac{d^2\alpha_i}{dy^2} - \frac{d^2\alpha_i}{dz^2}\right)\right\}\delta_j y\delta_j z \\
+&\left(\frac{d\alpha_i}{dz}\frac{d^2\alpha_i}{dxdy} - \frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d^2\alpha_i}{dydz}\right)\delta_j y^2 \\
+&\left\{\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d^2\alpha_i}{dxdy} - \frac{d\alpha_i}{dz}\frac{d^2\alpha_i}{dydz} + \frac{d\alpha_i}{dy}\left(\frac{d^2\alpha_i}{dz^2} - \frac{d^2\alpha_i}{dx^2}\right)\right\}\delta_j z\delta_j x \\
+&\left(\frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d^2\alpha_i}{dydz} - \frac{d\alpha_i}{dy}\frac{d^2\alpha_i}{dzdx}\right)\delta_j z^2 \\
+&\left\{\frac{d\alpha_i}{dy}\frac{d_2\alpha_i}{dydz} - \frac{d\alpha_i}{dx}\frac{d^2\alpha_i}{dzdx} + \frac{d\alpha_i}{dz}\left(\frac{d^2\alpha_i}{dx^2} - \frac{d^2\alpha_i}{dy^2}\right)\right\}\delta_j x\delta_j y
\end{aligned}\right\} = 0,$$

równanie różniczkowe szukane.

Równanie to, drugiego stopnia względem $\delta_j x$, $\delta_j y$, $\delta_j z$, dowodzi oczywiście, że dla każdego punktu M powierzchni α_i istnieją dwie powierzchnie rozwijalne, z których każda przecina się z nią podług innej linii krzywości; a że równania (4) i (5) utrzymują się jeszcze, gdy dwa znaczki j i k są przestawionemi, obie te linie, wychodząc z punktu M, przecinają się w nim pod kątem prostym.

Cel w jakim mówiliśmy o liniach krzywości, ogranicza się tylko na równaniu (5), które, jak zobaczymy niżej, będzie miało ważne zastosowanie. Jeżeli zaś wykonywając dość długie i żmudne rachunki, poszliśmy nieco dalej, chcieliśmy tylko przez to wyjaśnić to równanie, bez czego, mogłyby zostawiać pewne wątpliwości.

49. Twierdzenie Dupin'a. — Pamiętając że trzy znaczki i, j, k oznaczają trzy liczby 1, 2, 3, dowolnie uporządkowane, poddajmy twierdzeniu (5) kierunek $d\alpha_j$ prostej normalnej do powierzchni α_j, przechodzącej przez punkt M, który to kierunek jest koniecznie stycznym do powierzchni α_i, albowiem powierzchnie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ przecinają się prostokątnie. Jeżeli różniczkowanie δ_j odpowiada kierunkowi $d\alpha_j$, różniczkowanie δ_k odpowiada kierunkowi $d\alpha_k$ prostej normalnej do powierzchni α_k, przechodzącej także przez ten sam punkt M. Należy zatem założyć

$$\delta_j \frac{d\alpha_i}{dx} = \frac{d\frac{d\alpha_i}{dx}}{d\alpha_j} d\alpha_j, \quad \delta_j \frac{d\alpha_i}{dy} = \frac{d\frac{d\alpha_i}{dy}}{d\alpha_j} d\alpha_j, \quad \delta_j \frac{d\alpha_i}{dz} = \frac{d\frac{d\alpha_i}{dz}}{d\alpha_j} d\alpha_j,$$

$$\delta_k x = \frac{dx}{d\alpha_k} d\alpha_k = \frac{1}{h_k^2} \frac{d\alpha_k}{dx} d\alpha_k,$$

$$\delta_k y = \frac{dy}{d\alpha_k} d\alpha_k = \frac{1}{h_k^2} \frac{d\alpha_k}{dy} d\alpha_k,$$

$$\delta_k z = \frac{dz}{d\alpha_k} d\alpha_k = \frac{1}{h_k^2} \frac{d\alpha_k}{dz} d\alpha_k,$$

podług równań (1) [X, **45**], i pierwsza strona równania (5) staje się

$$\frac{d\alpha_j d\alpha_k}{h_k^2} \left(\frac{d\alpha_k}{dx} \frac{d\frac{d\alpha_i}{dx}}{d\alpha_j} + \frac{d\alpha_k}{dy} \frac{d\frac{d\alpha_i}{dy}}{d\alpha_j} + \frac{d\alpha_k}{dz} \frac{d\frac{d\alpha_i}{dz}}{d\alpha_j} \right).$$

Ponieważ ta ilość jest tożsamościowo zerem [X, **47**, (17)], warunek (5) jest sprawdzonym.

Tak więc, oba kierunki $d\alpha_j$ i $d\alpha_k$ są kierunkami linij krzywości powierzchni α_i w punkcie M; zkąd wynika ważne twierdzenie Dupin'a, *że w każdym układzie trzech familij powierzchni przecinających się prostokątnie, powierzchnie dwóch familij rysują na każdej powierzchni familii trzeciej, wszystkie jej linje krzywości.*

50. Krzywość powierzchni. — Przystępujemy teraz do wyznaczenia promienia krzywości $r_{i,j}$ powierzchni α_i, odpowiadającego linii krzywości $d\alpha_j$.

Nazywając, jak dawniej, przez λ którąbądź z trzech ilości x, y, z, którekolwiek z równań (3) przedstawić można jak następuje

$$\delta_j \frac{d\alpha_i}{d\lambda} = \frac{\delta_j h_i}{h_i} \frac{d\alpha_i}{d\lambda} - \frac{h_i}{r_{i,j}} \delta_j \lambda;$$

a pamiętając jeszcze że mamy także [**45**, (1)]

$$\delta_j \frac{d\alpha_i}{d\lambda} = \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j} d\alpha_j.$$

$$\delta_j h_i = \frac{dh_i}{d\alpha_j} d\alpha_j,$$

$$\delta_j \lambda = \frac{d\lambda}{d\alpha_j} d\alpha_j = \frac{1}{h_j^2} \frac{d\alpha_j}{d\lambda} d\alpha_j,$$

równanie to przybiera postać

$$(6) \qquad \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j} = \frac{1}{h_j} \frac{dh_i}{d\alpha_j} \frac{d\alpha_i}{d\lambda} - \frac{1}{r_{i,j}} \cdot \frac{h_i}{h^2_j} \frac{d\alpha_j}{d\lambda}.$$

Ponieważ mamy także podług formuły (5) [**45**]

$$(7) \qquad \frac{d\frac{d\alpha_i}{d\lambda}}{d\alpha_j} = \frac{1}{h_i} \frac{dh_i}{d\alpha_j} \frac{d\alpha_i}{d\lambda} - \frac{h_i}{h_j} \frac{dh_j}{d\alpha_i} \cdot \frac{h_i}{h_j^2} \frac{d\alpha_j}{d\lambda};$$

tożsamość konieczna dwóch wartości (6) i (7) wymaga ażeby było

$$(8)\qquad \frac{1}{r_{i,j}}=\frac{h_i}{h_j}\frac{dh_j}{d\alpha_i},$$

co daje oczywiście wartość krzywości szukanej.

Oznaczając przez $r_{i,k}$ promień krzywości powierzchni α_i, odpowiadający drugiemu kierunkowi $d\alpha_k$, znajdziemy podobnym sposobem

$$(9)\qquad \frac{1}{r_{i,k}}=\frac{h_i}{h_k}\frac{dh_k}{d\alpha_i}.$$

Summa obydwóch tych krzywości daje

$$\frac{1}{r_{i,j}}+\frac{1}{r_{i,k}}=\frac{h_i}{h_j}\frac{dh_j}{d\alpha_i}+\frac{h_i}{h_k}\frac{dh_k}{d\alpha_i};$$

a że na mocy równań (15) [X, **46**]

$$\frac{\Delta^2\alpha_i}{h_i}=h_jh_k\frac{d\dfrac{h_i}{h_jh_k}}{d\alpha_i}=\frac{dh_i}{d\alpha_i}-\frac{h_i}{h_j}\frac{dh_j}{d\alpha_i}-\frac{h_i}{h_k}\frac{dh_k}{d\alpha_i},$$

znajdujemy także

$$\frac{1}{r_{i,j}}+\frac{1}{r_{i,k}}=\frac{dh_i}{d\alpha_i}-\frac{\Delta^2\alpha_i}{h_i},$$

godne uwagi wyrażenie summy dwóch krzywości powierzchni α_i, albo podług Gauss'a, *krzywości kulistej*.

51. Wyrażenia sześciu krzywości. —Zastępując w formułach (8) i (9) ilości i, j, k przez i, j, k; j, k, i; k, i, j, znajdujemy krzywości następujące:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_{i,j}}=\dfrac{h_i}{h_j}\dfrac{dh_j}{d\alpha_i}, & \dfrac{1}{r_{i,k}}=\dfrac{h_i}{h_k}\dfrac{dh_k}{d\alpha_i}; \\ \dfrac{1}{r_{j,k}}=\dfrac{h_j}{h_k}\dfrac{dh_k}{d\alpha_k}, & \dfrac{1}{r_{j,i}}=\dfrac{h_j}{h_i}\dfrac{dh_i}{d\alpha_j}; \\ \dfrac{1}{r_{k,i}}=\dfrac{h_k}{h_i}\dfrac{dh_i}{d\alpha_k}, & \dfrac{1}{r_{k,j}}=\dfrac{h_k}{h_j}\dfrac{dh_j}{d\alpha_k}; \end{cases}$$

a zakładając $i=1, j=2, k=3$, mamy także

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r_{1,2}}=\dfrac{h_1}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\alpha_1}, & \dfrac{1}{r_{1,3}}=\dfrac{h_1}{h_3}\dfrac{dh_3}{d\alpha_1}; \\ \dfrac{1}{r_{2,3}}=\dfrac{h_2}{h_3}\dfrac{dh_3}{d\alpha_2}, & \dfrac{1}{r_{2,1}}=\dfrac{h_2}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\alpha_2}; \\ \dfrac{1}{r_{3,1}}=\dfrac{h_3}{h_1}\dfrac{dh_1}{d\alpha_3}, & \dfrac{1}{r_{3,2}}=\dfrac{h_3}{h_2}\dfrac{dh_2}{d\alpha_3}. \end{cases}$$

Niewiadomość znaków przynależnych parametrom różniczkowym

$$h_i=\sqrt{\left(\frac{d\alpha_i}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha_i}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\alpha_i}{dz}\right)^2},$$

pozostawia w wątpliwości znaki krzywości (11) powierzchni układu krzywokreślno-prostokątnego. Zasada do roztrzygnięcia tej kwestyi nie powinna być zewnątrz przyjętej umowy co do znaków w układzie prostokreślno-prostokątnym, t. j. że z zasady, jakąbyśmy przyjęli dla układu krzywokreślnego, powinna także wyniknąć zasada dla układu prostokreślnego, i taka sama na jaką się już zgodzono.

Każdy punkt wyznacza się, w tym ostatnim układzie, za pomocą trzech płaszczyzn równoległych do płaszczyzn współrzędnych, t. j. mających za równania

$$x=a_1,\ y=a_2,\ z=a_3,$$

a za parametry ilości a_1, a_2, a_3. Podług przyjętej umowy, uważa się za kierunek *dodatny* każdej z trzech osi x, y, z (normalnej do płaszczyzny a_i jeżeli układ jest prostokątny) ten jej kierunek, w którym parametr a_i rośnie; a za kierunek *odjemny* w którym tenże parametr maleje.

Podobnie więc w układzie krzywokreślno-prostokątnym, poprowadziwszy w punkcie M do powierzchni α_i prostą normalną, należy przyjąć za kierunek *dodatny* ten jej kierunek,

w którym parametr α_i rośnie; a za kierunek *odjemny*, w którym tenże parametr maleje.

Na mocy tego i [**44**], obie ilości $d\alpha_i$ i ds_i posiadają te same znaki, a ztąd parametr różniczkowy $h_i = \frac{d\alpha_i}{ds_i}$ jest zawsze dodatnym, i znaki krzywości powierzchni α_i zależą tylko od znaków pochodnych $\frac{dh_j}{d\alpha_i}, \frac{dh_k}{d\alpha_i}$. Promienie więc krzywości tejże powierzchni α_i, mogą być dodatne lub odjemne, stosownie do tego, czy parametry różniczkowe h_j, h_k rosną lub maleją gdy parametr α_i powiększa się, albo, maleją lub rosną gdy ten parametr zmniejsza się.

Ponieważ promienie krzywości, w punkcie M powierzchni α_i, odcinają się na jej normalnej w tym punkcie, promienie dodatne odcinają się w kierunku jej dodatnym a promienie odjemne w kierunku jej odjemnym. Można zatem powiedzieć, że krzywość w danym punkcie powierzchni α_i jest dodatną lub odjemną, podług tego, czy środek jej przypada w tej stronie normalnej w ktorej parametr α_i rośnie, czy też w tej stronie w której tenże parametr maleje.

52. Zastosowanie do układu kulistego. — Ażeby wyjaśnić i sprawdzić twierdzenia (15) [**46**] i (11) [**51**], uważmy w szczególności układ współrzędnych kulistych. Trzema familiami powierzchni wzajemnie prostopadłych są wtedy: 1° płaszczyzny południkowe, przechodzące przez oś biegunową, i których parametrem jest długość lub poziomołuk (azymut) ψ; 2° stożki proste otaczające tę oś, których parametrem jest szerokość lub wysokość φ; 3° kule współśrodkowe, których parametrem jest promień r. Zakładając więc

(12) $$\alpha_1 = \psi,\ \alpha_2 = \varphi,\ \alpha_3 = r,$$

elementa ds_i, znane ze swoich wartości, dają równości nastę-

pujące

$$ds_1 = \frac{d\psi}{h_1} = r\cos\varphi\, d\psi,$$

$$ds_2 = \frac{d\varphi}{h_2} = r d\varphi,$$

$$ds_3 = \frac{d\varphi}{h_3} = dr;$$

a z tych wynika bezpośrednio, że

$$(13) \qquad h_1 = \frac{1}{r\cos\varphi}, \quad h_2 = \frac{1}{r}, \quad h_3 = 1,$$

i następnie,

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{dh_1}{d\alpha_1} = 0, & \dfrac{dh_1}{d\alpha_2} = \dfrac{\sin\varphi}{r\cos^2\varphi}, & \dfrac{dh_1}{d\alpha_3} = -\dfrac{1}{r^2\cos\varphi}, \\ \dfrac{dh_2}{d\alpha_1} = 0, & \dfrac{dh_2}{d\alpha_2} = 0, & \dfrac{dh_2}{d\alpha_3} = -\dfrac{1}{r^2}, \\ \dfrac{dh_3}{d\alpha_1} = 0, & \dfrac{dh_3}{d\alpha_2} = 0, & \dfrac{dh_3}{d\alpha_3} = 0. \end{cases}$$

Wartości (12) i (13) podstawione w równaniach (15) [46] dają bardzo łatwo

$$\Delta^2\psi = \frac{1}{r^2\cos\varphi} \frac{d\frac{1}{\cos\varphi}}{d\psi} = 0,$$

$$\Delta^2\varphi = \frac{1}{r^2\cos\varphi} \frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\frac{\operatorname{tg}\varphi}{r^2},$$

$$\Delta^2 r = \frac{1}{r^2\cos\varphi} \frac{dr^2\cos\varphi}{dr} = \frac{2}{r},$$

t. j. wartości parametrów różniczkowych drugiego rzędu układu kulistego.

Wartości znowuż (13) i (14), podstawione w równania (11)

[51], dają oczywiście

$$\text{dla } \psi: \quad \frac{1}{r_{1,2}} = 0, \quad \frac{1}{r_{1,3}} = 0;$$

$$\text{dla } \varphi: \quad \frac{1}{r_{2,3}} = 0, \quad \frac{1}{r_{2,1}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{r};$$

$$\text{dla } r: \quad \frac{1}{r_{3,1}} = -\frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r_{3,2}} = -\frac{1}{r}.$$

Z pomiędzy więc sześciu krzywości, trzy są zerami; jak to zresztą było widocznem, albowiem, dwie krzywości płaszczyzny południkowej ψ i jedna krzywość stożka szerokości φ, odpowiadająca jego linii krzywości prostolinijnej, są oczywiście zerami. Z pozostałych trzech krzywości, obie krzywości kuli promienia r są równemi sobie i krzywości jej wielkiego koła (co było także wiadomem); lecz krzywości te posiadają znaki *odjemne* (czego nie można było przewidzieć), albowiem ich wspólny środek przypada na kierunku odjemnym normalnej do powierzchni kuli, t. j. w tej stronie, w której kierunku parametr r zmniejsza się. Nakoniec, druga krzywość stożka szerokości φ, odpowiadająca jego linii krzywości kołowej, i której wartość bezwzględna mogła być łatwo oznaczoną, jest *dodatna*, albowiem jej środek, przypadający na osi biegunowej, znajduje się w części dodatnej normalnej do stożka, t. j. w tej stronie, w której kierunku parametr φ powiększa się.

LEKCYA XII

Formuły zasadnicze do zamiany zmiennych niezależnych. — Parametry elipsoidy odkształceń we współrzędnych krzywokreślnych. — Inne ważne formuły. — Przyrost pracy mechanicznej we współrzędnych krzywokreślnych.

53. Formuły zasadnicze do zamiany zmiennych niezależnych. — Ażeby przygotować wszystko co jest potrzebnem do traktowania zadań mechaniki cząsteczkowej we współrzędnych krzywokreślnych, poświęcimy parę jeszcze ustępów na przysposobienie niezbędnych w tym celu formuł, za pomocą których, dość długie nieraz rachunki będzie można znacznie uprościć. Formuły te możnaby także tam tylko wykładać, gdzie zachodzi widoczna ich potrzeba, i postępowanie takie przedstawia również pewne korzyści, łącząc jednocześnie cel ze sposobem otrzymania potrzebnej formuły. Lecz zbytek oznaczeń, któreśmy dla zjednoczenia wielu formuł w jednej formule często wprowadzali, zaciera się łatwo w pamięci, a z tego powodu, oddaliwszy się nieco od nauki o współrzędnych krzywokreślnych, potrzebaby prawie zawsze powtarzać ją na nowo, wiele razy tylko zachodzi konieczność wyznaczenia jakiej nowej formuły, na niej się opierającej. W tym to jedynie celu poświęciliśmy już wyżej [X, 46] jeden ustęp na wyznaczenie we współrzędnych krzywokreślnych parametrów różniczkowych $\Delta^1 F$ i $\Delta^2 F$, z których dopiero później będziemy korzystali, i które, w całym dziale traktującym o mechanice cząsteczkowej wogóle, żadnego zastosowania nie mają. Równie i teraz, po-

między formułami jakie zamierzamy otrzymać, niektóre z nich tylko zaraz użytecznemi będą.

Wprowadźmy do formuły (8) [X, **45**] pierwsze strony równań (10) [XI, **51**] i zastąpmy odpowiednio ilości i, j, k przez 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2. To daje bardzo łatwo

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha_1}{d\mu d\lambda} &= h_1\left(\frac{dh_1}{d\alpha_1}c_1d_1 - \frac{c_2d_2}{r_{1,2}} - \frac{c_3d_3}{r_{1,3}} + \frac{c_1d_2+c_2d_1}{r_{2,1}} + \frac{c_3d_1+c_1d_3}{r_{3,1}}\right),\\
\frac{d^2\alpha_2}{d\mu d\lambda} &= h_2\left(\frac{dh_2}{d\alpha_2}c_2d_2 - \frac{c_3d_3}{r_{2,3}} - \frac{c_1d_1}{r_{2,1}} + \frac{c_2d_3+c_3d_2}{r_{3,2}} + \frac{c_1d_2+c_2d_1}{r_{1,2}}\right),\\
\frac{d^2\alpha_2}{d\mu d\lambda} &= h_3\left(\frac{dh_3}{d\alpha_3}c_3d_3 - \frac{c_1d_1}{r_{3,1}} - \frac{c_2d_2}{r_{3,2}} + \frac{c_3d_1+c_1d_3}{r_{1,3}} + \frac{c_2d_3+c_3d_2}{r_{2,3}}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

gdzie [**45**, (6)], [**51**, (11)]

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{h_1}\frac{d\alpha_1}{d\lambda}, & c_2 &= \frac{1}{h_2}\frac{d\alpha_2}{d\lambda}, & c_3 &= \frac{1}{h_3}\frac{d\alpha_3}{d\lambda},\\
d_1 &= \frac{1}{h_1}\frac{d\alpha_1}{d\lambda}, & d_2 &= \frac{1}{h_2}\frac{d\alpha_2}{d\mu}, & d_3 &= \frac{1}{h_3}\frac{d\alpha_3}{d\mu};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{r_{1,2}} &= \frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_1}, & \frac{1}{r_{1,3}} &= \frac{h_1}{h_3}\frac{dh_3}{d\alpha_1};\\
\frac{1}{r_{2,3}} &= \frac{h_2}{h_3}\frac{dh_3}{d\alpha_2}, & \frac{1}{r_{2,1}} &= \frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\alpha_2};\\
\frac{1}{r_{3,1}} &= \frac{h_3}{h_1}\frac{dh_1}{d\alpha_3}, & \frac{1}{r_{3,2}} &= \frac{h_3}{h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_3};
\end{aligned}
\right.
$$

ilości zaś (λ, μ) i (c, d) oznaczają którybądź z sześciu układów

(x, x) i (m, m); (y, y) i (n, n); (z, z) i (p, p);

(y, z) i (n, p); (z, x) i (p, m); (x, y) i (m, n).

Tablica (7) [IX, **43**) prowadzi, za pomocą metody rzutów,

do równań

$$(4)\quad \begin{cases} u=\dfrac{U}{h_1}\dfrac{d\alpha_1}{dx}+\dfrac{V}{h_2}\dfrac{d\alpha_2}{dx}+\dfrac{W}{h_3}\dfrac{d\alpha_3}{dx}, \\ v=\dfrac{U}{h_1}\dfrac{d\alpha_1}{dy}+\dfrac{V}{h_2}\dfrac{d\alpha_2}{dy}+\dfrac{W}{h_3}\dfrac{d\alpha_3}{dy}, \\ w=\dfrac{U}{h_1}\dfrac{d\alpha_1}{dz}+\dfrac{V}{h_2}\dfrac{d\alpha_2}{dz}+\dfrac{W}{h_3}\dfrac{d\alpha_3}{dz}; \end{cases}$$

z których dwa którebądź zastąpić można, ażeby być w zgodzie z formułami (1), przez dwa równania

$$(5)\quad \begin{cases} L=\dfrac{U}{h_1}\dfrac{d\alpha_1}{d\lambda}+\dfrac{V}{h_2}\dfrac{d\alpha_2}{d\lambda}+\dfrac{W}{h_3}\dfrac{d\alpha_3}{d\lambda}, \\ M=\dfrac{U}{h_1}\dfrac{d\alpha_1}{d\mu}+\dfrac{V}{h_2}\dfrac{d\alpha_2}{d\mu}+\dfrac{W}{h_3}\dfrac{d\alpha_3}{d\mu}; \end{cases}$$

pamiętając tylko że jeżeli (λ, μ) oznacza którykolwiek z sześciu układów (x, x), (y, y), (z, z), (y, z), (z, x), (x, y); (L, M) oznacza odpowiednio którykolwiek z sześciu układów (u, u), (v, v) (w, w), (v, w), (w, u), (u, v).

Znajdziemy więc wartości pochodnych $\dfrac{dL}{d\mu}$ i $\dfrac{dM}{d\lambda}$, różniczkując drugie strony równań (5), pierwsze względem μ a drugie względem λ, i uważając, w tem różniczkowaniu, ilorazy $\dfrac{U}{h_1}, \dfrac{V}{h_2}, \dfrac{W}{h_3}$ za funkcye ilości $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zależnych od λ i μ; każdą zaś z pochodnych $\dfrac{d\alpha_i}{d\lambda}$ i $\dfrac{d\alpha_i}{d\mu}$ za funkcye zależne od μ i λ.

Wskazawszy te działania, należy następnie rozwinąć pochodne ilorazów $\dfrac{U}{h_1}, \dfrac{V}{h_2}, \dfrac{W}{h_3}$ i uwzględnić równania (1), (2), (3), tudzież definicyę geometryczną [IX, **44** (11)] paramtru różniczkowego

$$(6)\qquad h_i=\frac{d\alpha_i}{ds_i}.$$

W ten sposób przyjdziemy bez trudności do formuł następujących

$$
(7)\begin{cases}
\dfrac{dL}{d\mu}= \\
=c_1d_1\left(\dfrac{dU}{ds_1}-\dfrac{V}{r_{2,1}}-\dfrac{W}{r_{3,1}}\right)+c_1d_2\left(\dfrac{dU}{ds_2}+\dfrac{V}{r_{1,2}}\right)+c_1d_3\left(\dfrac{dU}{ds_3}+\dfrac{W}{r_{1,3}}\right) \\
+c_2d_2\left(\dfrac{dV}{ds_2}-\dfrac{W}{r_{3,2}}-\dfrac{U}{r_{1,2}}\right)+c_2d_3\left(\dfrac{dV}{ds_3}+\dfrac{W}{r_{2,3}}\right)+c_2d_1\left(\dfrac{dV}{ds_1}+\dfrac{U}{r_{2,1}}\right) \\
+c_3d_3\left(\dfrac{dW}{ds_3}-\dfrac{U}{r_{1,3}}-\dfrac{V}{r_{2,3}}\right)+c_3d_1\left(\dfrac{dW}{ds_1}+\dfrac{U}{r_{3,1}}\right)+c_3d_2\left(\dfrac{dW}{ds_2}+\dfrac{V}{r_{2,3}}\right), \\
\dfrac{dM}{d\lambda}= \\
=c_1d_1\left(\dfrac{dU}{ds_1}-\dfrac{V}{r_{2,1}}-\dfrac{W}{r_{3,1}}\right)+c_2d_1\left(\dfrac{dU}{ds_2}+\dfrac{V}{r_{1,2}}\right)+c_3d_1\left(\dfrac{dU}{ds_3}+\dfrac{W}{r_{1,3}}\right) \\
+c_2d_2\left(\dfrac{dV}{ds_2}-\dfrac{W}{r_{3,2}}-\dfrac{U}{r_{1,2}}\right)+c_3d_2\left(\dfrac{dV}{ds_3}+\dfrac{W}{r_{2,3}}\right)+c_1d_2\left(\dfrac{dV}{ds_1}+\dfrac{U}{r_{2,1}}\right) \\
+c_3d_3\left(\dfrac{dW}{ds_3}+\dfrac{U}{r_{1,3}}+\dfrac{V}{r_{2,3}}\right)+c_1d_3\left(\dfrac{dW}{ds_1}+\dfrac{U}{r_{3,1}}\right)+c_2d_3\left(\dfrac{dW}{ds_2}+\dfrac{V}{r_{3,2}}\right),
\end{cases}
$$

54. Parametry elipsoidy odkształceń we współrzędnych krzywokreślnych. Dodając równania (7) stronami odpowiadającemi, znajdujemy formułę

$$
(8)\begin{cases}
\dfrac{dL}{d\mu}+\dfrac{dM}{d\lambda}= \\
=2c_1d_1\left(\dfrac{dU}{ds_1}-\dfrac{V}{r_{2,1}}-\dfrac{W}{r_{3,1}}\right)+(c_2d_3+c_3d_2\left(\dfrac{dV}{ds_3}+\dfrac{dW}{ds_2}+\dfrac{V}{r_{3,2}}+\dfrac{W}{r_{2,3}}\right) \\
+2c_2d_2\left(\dfrac{dV}{ds_2}-\dfrac{W}{r_{3,2}}-\dfrac{U}{r_{1,2}}\right)+(c_3d_1+c_1d_3\left(\dfrac{dW}{ds_1}+\dfrac{dU}{ds_3}+\dfrac{W}{r_{1,3}}+\dfrac{U}{r_{3,1}}\right) \\
+2c_3d_3\left(\dfrac{dW}{ds_3}-\dfrac{U}{r_{1,3}}+\dfrac{V}{r_{2,3}}\right)+(c_1d_2+c_2d_1\left(\dfrac{dU}{ds_2}+\dfrac{dV}{ds_1}+\dfrac{U}{r_{2,1}}+\dfrac{V}{r_{1,2}}\right),
\end{cases}
$$

której pierwsza strona, jeżeli $\mu=\lambda$, przedstawia po kolei na-

stępujące ilości

$$2\frac{du}{dx},\quad 2\frac{dv}{dy},\quad 2\frac{dw}{dz},$$

zakładając $\lambda=x$, $\lambda=y$, $\lambda=z$. Jeżeli zaś μ jest różnem od λ, pierwsza strona tej samej formuły, daje zawsze

$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\quad \text{lub}\quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz},\quad \text{lub}\quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx},$$

stosownie do tego, czy jest $\lambda=y$ i $\mu=z$; czy $\lambda=z$ i $\mu=x$, czy $\lambda=x$ i $\mu=y$.

Podzieliwszy trzy pierwsze, z sześciu tak otrzymanych formuł, przez 2, powróćmy do równań (12) [IV, **18**] i uważmy że w równaniu (8) układ (c, d) przedstawia po kolei następujące układy

$$(m, m),\quad (n, n),\quad (p, p),\quad (n, p),\quad (p, m),\quad (m, n),$$

odpowiednio do sześciu założeń któreśmy zrobili o układzie (λ, μ). Porównywając drugie strony tych równań (12) [**18**] z drugiemi stronami równań (8), znajdziemy oczywiście

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{du'}{dx'}=\dfrac{dU}{ds_1}-\dfrac{V}{r_{2,1}}-\dfrac{W}{r_{3,1}}, & \dfrac{dv'}{dz'}+\dfrac{dw'}{dy'}=\dfrac{dV}{ds_3}+\dfrac{dW}{ds_2}+\dfrac{V}{r_{3,2}}+\dfrac{W}{r_{2,3}}, \\[2ex] \dfrac{dv'}{dy'}=\dfrac{dV}{ds_2}-\dfrac{W}{r_{3,2}}-\dfrac{U}{r_{1,2}}, & \dfrac{dw'}{dx'}+\dfrac{du'}{dz'}=\dfrac{dW}{ds_1}+\dfrac{dU}{ds_3}+\dfrac{W}{r_{1,3}}+\dfrac{U}{r_{3,1}}, \\[2ex] \dfrac{dw'}{dz'}=\dfrac{dW}{ds_3}-\dfrac{U}{r_{1,3}}-\dfrac{V}{r_{2,3}}, & \dfrac{du'}{dy'}+\dfrac{dv'}{dx'}=\dfrac{dU}{ds_2}+\dfrac{dV}{ds_1}+\dfrac{U}{r_{2,1}}+\dfrac{V}{r_{1,2}}; \end{cases}$$

albowiem rozwiązując układ liniowy (12) [**18**] względem pierwszych stron równań (9) a układ liniowy (8) względem drugich stron tych samych równań (9) otrzymamy wartości te same. Równania więc (9) dają rzeczywiście wyrażenia sześciu parametrów $\dfrac{d(u', v', w')}{d(x', y', z')}$ elipsoidy odkształceń, we współrzędnych krzywokreślnych.

Nie należy zapominać że w równaniach (9) wartości ilości u', v', w' są odpowiednio równemi wartościom ilości U, V, W; przez różnicę zaś jakąśmy w ich oznaczeniu wprowadzili, rozumie się tylko, że ilości u, v', w' są funkcyami współrzędnych prostokreślnych (x', y', z') a ilości U, V, W zależą od współrzędnych krzywokreślnych $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

55. Inne ważne formuły. — Odejmując drugie z równań (7) od pierwszego stronami odpowiadającemi, i wprowadzając, do otrzymanej w ten sposób formuły, drugie strony równań (3) jakoteż wartości ds_i z równania (6), znajdziemy bez trudności

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dL}{d\mu}-\frac{dM}{d\lambda} &= (c_2d_3-c_3d_2)h_2h_3\left(\frac{d\frac{V}{h_2}}{d\alpha_3}-\frac{d\frac{W}{h_3}}{d\alpha_2}\right) \\ &+(c_3d_1-c_1d_3)h_3h_1\left(\frac{d\frac{W}{h_3}}{d\alpha_1}-\frac{d\frac{U}{h_1}}{d\alpha_3}\right) \\ &+(c_1d_2-c_2d_1)h_1h_2\left(\frac{d\frac{U}{h_1}}{d\alpha_2}-\frac{d\frac{V}{h_2}}{d\alpha_1}\right). \end{aligned}\right.$$

Założmy dla skrócenia

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{h_2h_3}{h_1}\left(\frac{d\frac{V}{h_2}}{d\alpha_3}-\frac{d\frac{W}{h_3}}{d\alpha_2}\right) &= \mathcal{A}, \\ \frac{h_3h_1}{h_2}\left(\frac{d\frac{W}{h_3}}{d\alpha_1}-\frac{d\frac{U}{h_1}}{d\alpha_3}\right) &= \mathcal{B}, \\ \frac{h_1h_2}{h_3}\left(\frac{d\frac{U}{h_1}}{d\alpha_2}-\frac{d\frac{V}{h_2}}{d\alpha_1}\right) &= \mathcal{C}, \end{aligned}\right.$$

i zastąpmy w formule (10) λ i μ, raz przez y i z, drugi raz

przez z i x, trzeci raz przez x i y. Zważywszy przytem na związki (9) [IV, (18)] i na tablice (6) [**18**] i (7) [**43**], formuła ta daje

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dw}{dy} = k\dfrac{d\alpha_1}{dx}\mathfrak{A} + k\dfrac{d\alpha_2}{dx}\mathfrak{B} + k\dfrac{d\alpha_3}{dx}\mathfrak{C}, \\ \dfrac{dw}{dx} - \dfrac{du}{dz} = k\dfrac{d\alpha_1}{dy}\mathfrak{A} + k\dfrac{d\alpha_2}{dy}\mathfrak{B} + k\dfrac{d\alpha_3}{dy}\mathfrak{C}, \\ \dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx} = k\dfrac{d\alpha_1}{dz}\mathfrak{A} + k\dfrac{d\alpha_2}{dz}\mathfrak{B} + k\dfrac{d\alpha_3}{dz}\mathfrak{C}, \end{cases}$$

gdzie $k^2=1$.

Powtórzywszy na równaniach (12) te same działania, które wykonaliśmy w celu ich otrzymania na równaniach (4), i założywszy:

$$\mathfrak{P} = h_2h_3\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\alpha_3} - \frac{d\mathfrak{C}}{d\alpha_2}\right)$$

$$\mathfrak{Q} = h_3h_1\left(\frac{d\mathfrak{C}}{d\alpha_1} - \frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha_3}\right)$$

$$\mathfrak{R} = h_1h_2\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha_2} - \frac{d\mathfrak{B}}{d\alpha_1}\right)$$

znaleźlibyśmy oczywiście

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d\left(\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{du}{dz}\right)}{dz} - \dfrac{d\left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right)}{dy} = m_1\mathfrak{P} + m_2\mathfrak{Q} + m_3\mathfrak{R}, \\ \dfrac{d\left(\dfrac{du}{dy} - \dfrac{dv}{dx}\right)}{dx} - \dfrac{d\left(\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dw}{dy}\right)}{dz} = n_1\mathfrak{P} + n_2\mathfrak{Q} + n_3\mathfrak{R}, \\ \dfrac{d\left(\dfrac{dv}{dz} - \dfrac{dw}{dy}\right)}{dy} - \dfrac{d\left(\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{du}{dz}\right)}{dx} = p_1\mathfrak{P} + p_2\mathfrak{Q} + p_3\mathfrak{R}, \end{cases}$$

albowiem wejdzie wtenczas dwa razy ilość k, t. j. $k^2=1$.

Lecz, wykonywając na funkcyach u, v, w, danych przez drugie strony równań (11) [**18**], różniczkowania wskazane na pierwszych stronach równań (13), i posługując się w tym celu formułami symbolicznemi ustępu **18**, znaleźlibyśmy także, co jest nawet widocznem, że ilości $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ posiadają wartości odpowiednich pierwszych stron równań (13), jeżeli w nich zastąpi się ilości u, v, w przez u', v', w', i ilości x, y, z przez x', y', z'. To daje bezpośrednio

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\left(\frac{dw'}{dx'}-\frac{du'}{dz'}\right)}{dz'}-\frac{d\left(\frac{du'}{dy'}-\frac{dv'}{dx'}\right)}{dy'}=h_2h_3\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\alpha_3}-\frac{d\mathfrak{C}}{d\alpha_2}\right),\\
&\frac{d\left(\frac{du'}{dy'}-\frac{dv'}{dx'}\right)}{dx'}-\frac{d\left(\frac{dv'}{dz'}-\frac{dw'}{dy'}\right)}{dz'}=h_3h_1\left(\frac{d\mathfrak{C}}{d\alpha_1}-\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha_3}\right),\\
&\frac{d\left(\frac{dv'}{dz'}-\frac{dw'}{dy'}\right)}{dy'}-\frac{d\left(\frac{dw'}{dx'}-\frac{du'}{dz'}\right)}{dx'}=h_1h_2\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\alpha_2}-\frac{d\mathfrak{B}}{d\alpha_1}\right);
\end{aligned}\right.
$$

rozumiejąc przez $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ pierwsze strony równań (11).

Nakoniec, z dodania trzech pierwszych równań (12) [**18**], stronami odpowiadającemi, wypada oczywiście że summa trzech ilości

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}=\theta,$$

jest niezmiennikiem. Na mocy równań (9), ilość θ wyraża się we współrzędnych krzywokreślnych

$$
(15)\quad \theta=\left\{
\begin{aligned}
&=\frac{dU}{ds_1}+\frac{dV}{ds_2}+\frac{dW}{ds_3}-\frac{U}{\sigma_1}-\frac{V}{\sigma_2}-\frac{W}{\sigma_3}\\
&=h_1h_2h_3\left(\frac{d\frac{U}{h_2h_3}}{d\alpha_1}+\frac{d\frac{V}{h_3h_1}}{d\alpha_2}+\frac{d\frac{W}{h_1h_2}}{d\alpha_3}\right)
\end{aligned}\right.
$$

oznaczając przez

$$\frac{1}{\sigma_1}=\frac{1}{r_{1,2}}+\frac{1}{r_{1,3}}, \qquad \frac{1}{\sigma_2}=\frac{1}{r_{2,3}}+\frac{1}{r_{2,1}}, \qquad \frac{1}{\sigma_3}=\frac{1}{r_{3,1}}+\frac{1}{r_{3,2}}$$

krzywości kuliste powierzchni współrzędnych $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Uważając θ za funkcyę współrzędnych krzywokreślnych $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, zależących od współrzędnych prostokreślnych $(x, y, z,)$ mamy oczywiście

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{d\theta}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d\theta}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_2}{dx}+\frac{d\theta}{d\alpha_3}\frac{d\alpha_3}{dx},$$

lub także [**18**, (6)], [**43**, (7)] pierwsze z równań

$$\frac{d\theta}{dx}=m_1h_1\frac{d\theta}{d\alpha_1}+m_2h_2\frac{d\theta}{d\alpha_2}+m_3h_3\frac{d\theta}{d\alpha_3},$$

$$\frac{d\theta}{dy}=n_1h_1\frac{d\theta}{d\alpha_1}+n_2h_2\frac{d\theta}{d\alpha_2}+n_3h_3\frac{d\theta}{d\alpha_3},$$

$$\frac{d\theta}{dz}=p_1h_1\frac{d\theta}{d\alpha_1}+p_2h_2\frac{d\theta}{d\alpha_2}+p_3h_3\frac{d\theta}{d\alpha_3},$$

z których dwa drugie otrzymują się różniczkując θ względem y i względem z.

Lecz jeżeli wyrazimy θ za pomocą współrzędnych (x', y', z') układu prostokątnego, który ma początek wspólny z układem współrzędnych (x, y, z) i który ma za osie proste, równoległe do normalnych powierzchni współrzędnych $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, tworzące z osiami dawnemi kąty o dostawach m_i, n_i, p_i; mamy także

$$\frac{d\theta}{dx}=m_1\frac{d\theta}{dx'}+m_2\frac{d\theta}{dy'}+m_3\frac{d\theta}{dz'},$$

$$\frac{d\theta}{dy}=n_1\frac{d\theta}{dx'}+n_2\frac{d\theta}{dy'}+n_3\frac{d\theta}{dz'},$$

$$\frac{d\theta}{dz}=p_1\frac{d\theta}{dx'}+p_2\frac{d\theta}{dy'}+p_3\frac{d\theta}{dz'};$$

albowiem różniczkując θ względem x, y i z należy go uważać za funkcyę ilości x', y', z' zależących od x, y, z, za pomocą formuł służących do przemiany współrzędnych prostokątnych (x', y', z') na prostokątne (x, y, z).

Porównanie dwóch otrzymanych teraz układów wartości $\frac{d\theta}{dx}, \frac{d\theta}{dy}, \frac{d\theta}{dz}$, będących oczywiście tożsamościowemi, daje bezpośrednio

$$(16) \qquad \frac{d\theta}{dx'} = h_1 \frac{d\theta}{d\alpha_1}, \quad \frac{d\theta}{dy'} = h_2 \frac{d\theta}{d\alpha_2}, \quad \frac{d\theta}{dz'} = h_3 \frac{d\theta}{d\alpha_3}.$$

Formuły (14) i (11), (15) i (16) będą miały swoje zastosowanie w pewnym szczególnym, lecz bardzo ważnym, przypadku; i uproszczą znacznie, a nawet zupełnie wyrugują, niezmiernie długie rachunki, któreby, dla osiągnięcia zamierzonego tam celu, wykonać potrzeba było. Dlatego też nie wahaliśmy się otrzymać je przy formułach (9), obecnie potrzebnych, tembardziej, że przedstawiała się po temu dość krótka i prosta droga.

56. Przyrost pracy mechanicznej we współrzędnych krzywokreślnych. — Funkcya P, praca mechaniczna jednostki elementu $dx'dy'dz'$, jest niezmiennikiem sześciu parametrów $\frac{d(u', v', w')}{d(x', y', z')}$ elipsoidy odkształceń; i dlatego że jest niezmiennikiem, te same prawo zachowuje się także dla elementu krzywokreślnego. Różniczkując tę funkcyę względem pomienionych parametrów, danych przez drugie strony równań (9), i oddzielając wyrazy

$$\delta\frac{dU}{ds_1}, \ \delta\frac{dV}{ds_2}, \ \delta\frac{dW}{ds_3}, \ \delta\left(\frac{dV}{ds_3} + \frac{dW}{ds_2}\right), \ \delta\left(\frac{dW}{ds_1} + \frac{dU}{ds_3}\right), \ \delta\left(\frac{dU}{ds_2} + \frac{dV}{ds_1}\right)$$

od pozostałych, znajdziemy jej przyrost

$$(17) \qquad \delta P = \delta_1 P + \delta_2 P,$$

w którem przez $\delta_1 P$ oznacza drugą stronę równania

$$\delta_1 P = \mathfrak{N}_1 \delta \frac{dU}{ds_1} + \mathfrak{N}_2 \delta \frac{dV}{ds_3} + \mathfrak{N}_3 \delta \frac{dW}{ds_3}$$
$$+ \mathfrak{T}_1 \delta \left(\frac{dV}{ds_3} + \frac{dW}{ds_2}\right) + \mathfrak{T}_2 \delta \left(\frac{dW}{ds_1} + \frac{dU}{d\partial_3}\right) + \mathfrak{T}_3 \delta \left(\frac{dU}{ds_2} + \frac{dV}{ds_1}\right)$$

a $\delta_2 P$ drugą stronę równania

$$(18) \qquad \delta_2 P = \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\mathfrak{T}_2}{r_{3,1}} + \frac{\mathfrak{T}_3}{r_{2,1}} - \frac{\mathfrak{N}_2}{r_{1,2}} - \frac{\mathfrak{N}_3}{r_{1,3}}\right) \delta U \\ + &\left(\frac{\mathfrak{T}_3}{r_{1,2}} + \frac{\mathfrak{T}_1}{r_{3,2}} - \frac{\mathfrak{N}_3}{r_{2,3}} - \frac{\mathfrak{N}_1}{r_{2,1}}\right) \delta V \\ + &\left(\frac{\mathfrak{T}_1}{r_{2,3}} + \frac{\mathfrak{T}_2}{r_{1,3}} - \frac{\mathfrak{N}_1}{r_{3,1}} - \frac{\mathfrak{N}_2}{r_{3,2}}\right) \delta W \end{aligned} \right\}.$$

Ponieważ $ds_1 ds_2 ds_3$ jest objętością krzywokreślno-prostokątnego elementu, przyrost pracy mechanicznej tego elementu wyraża się przez iloczyn $ds_1 ds_2 ds_3 \, \delta P$, a przyrost pracy w całej przestrzeni ciała, ograniczonego powierzchnią ω, wyraża się przez całkę potrójną $\int\int\int ds_1 ds_2 ds_3 \delta P$, wziętą w granicach jego objętości.

Zastąpiwszy δP przez drugą stronę równania (17), jest oczywiście

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int\int\int ds_1 ds_2 ds_3 \delta P = &\int\int\int ds_1 ds_2 ds_3 \delta_1 P \\ &+ \int\int\int ds_1 ds_2 ds_3 \delta_2 P. \end{aligned} \right.$$

Za pomocą znanej metody całkowania przez części [II, 9], całkę potrójną $\int\int\int ds_1 ds_2 ds_3 \delta_1 P$ można zastąpić przez summę

dwóch całek

$$
(20)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\iiint \left\{
\begin{aligned}
&-\left[\frac{d(ds_2 ds_3 \mathcal{N}_1)}{ds_1} ds_1 + \frac{d(ds_3 ds_1 \mathfrak{T}_3)}{ds_2} ds_2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{d(ds_1 ds_2 \mathfrak{T}_2)}{ds_3} ds_3 \right] \delta U\\
&-\left[\frac{d(ds_2 ds_3 \mathfrak{T}_3)}{ds_1} ds_1 + \frac{d(ds_3 ds_1 \mathcal{N}_2)}{ds_2} ds_2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{d(ds_1 ds_2 \mathfrak{T}_1)}{ds_3} ds_3 \right] \delta V\\
&-\left[\frac{d(ds_2 ds_3 \mathfrak{T}_2)}{ds_1} ds_1 + \frac{d(ds_3 ds_1 \mathfrak{T}_1)}{ds_2} ds_2 \right.\\
&\qquad \left. + \frac{d(ds_1 ds_2 \mathcal{N}_3)}{ds_3} ds_3 \right] \delta W
\end{aligned}
\right\}\\
&+ \int d\omega \left\{
\begin{aligned}
&(\mathcal{N}_1 m + \mathfrak{T}_3 n + \mathfrak{T}_2 p)\delta U\\
&+ (\mathfrak{T}_3 n + \mathcal{N}_2 n + \mathfrak{T}_1 p)\delta V\\
&+ (\mathfrak{T}_2 m + \mathfrak{T}_1 n + \mathcal{N}_3 p)\delta W
\end{aligned}
\right\},
\end{aligned}
\right.
$$

z których jedna, potrójna, rozciąga się także do całej przestrzeni ciała, a druga, pojedyncza, do jego tylko powierzchni. Ilości m, n, p oznaczają tutaj dostawy kątów, które tworzy normalna zewnętrzna do powierzchni ciała w punkcie M poprowadzona, z trzema także normalnemi zewnętrznemi poprowadzonemi w M do trzech współrzędnych powierzchni $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, w tym samym punkcie przecinających się.

Z przyczyny związku $ds_i = \frac{d\alpha_i}{h_i}$ i niezależności wzajemnej trzech parametrów α_1, α_2, α_3 znajdujemy wogóle [XI, **51**, (10)]

$$
\frac{d(ds_j ds_k)}{ds_i} = h_i\, d\alpha_j\, d\alpha_k \frac{d\dfrac{1}{h_j h_k}}{d\alpha_i} = - ds_j\, ds_k \left(\frac{1}{r_{i,j}} + \frac{1}{r_{i,k}}\right);
$$

wykonywając więc, pod całką potrójną w (20), wskazane

10

różniczkowania względem s_1, s_2, s_3 każdy wyraz n. p.

$$\frac{d(ds_2 ds_3 \mathfrak{N}_1)}{ds_1} ds_1$$

można zastąpić przez drugą stronę równania

$$\frac{d(ds_2 ds_3 \mathfrak{N}_1)}{ds_1} ds_1 = ds_1 ds_2 ds_3 \frac{d\mathfrak{N}_1}{ds_1} - ds_1 ds_2 ds_3 \mathfrak{N}_1 \left(\frac{1}{r_{1,2}} + \frac{1}{r_{1,3}}\right).$$

Powtórzywszy podobne działania z pozostałemi wyrazami i założywszy

$$(21) \qquad \Delta_1 P = \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{d\mathfrak{N}_1}{ds_1} + \frac{d\mathfrak{T}_3}{ds_2} + \frac{d\mathfrak{T}_2}{ds_3}\right)\delta U \\ -\left(\frac{d\mathfrak{T}_3}{ds} + \frac{d\mathfrak{N}_2}{ds_2} + \frac{d\mathfrak{T}_1}{ds_3}\right)\delta V \\ -\left(\frac{d\mathfrak{T}_2}{ds_1} + \frac{d\mathfrak{T}_1}{ds_2} + \frac{d\mathfrak{N}_3}{ds_3}\right)\delta W \end{array} \right\},$$

można, w drugiej stronie równania (19), zastąpić w całce potrójnej $\int\int\int ds_1 ds_2 ds_3 \delta_1 P$ ilośc $\delta_1 P$ przez znalezioną teraz (21) $\Delta_1 P$, bylebyśmy tylko nie rozumieli przez $\delta_2 P$ wyrażenia (18); ale, ażebyśmy na mocy tego wyrażenia (18) i wyrazów pozostałych z odjęcia $ds_1 ds_2 ds_3 \Delta_1 P$ od nawiasu całki potrójnej w (20), rozumieli przez $\delta_2 P$ inne wyrażenie, $\Delta_2 P$, następujące:

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 P = \\ \left\{\frac{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2}{r_{1,2}} + \frac{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_3}{r_{1,3}} + \mathfrak{T}_3\left(\frac{1}{r_{2,3}} + \frac{2}{r_{2,1}}\right) + \mathfrak{T}_2\left(\frac{2}{r_{3,1}} + \frac{1}{r_{3,2}}\right)\right\}\delta U \\ + \left\{\frac{\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_3}{r_{2,3}} + \frac{\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1}{r_{2,1}} + \mathfrak{T}_1\left(\frac{1}{r_{3,1}} + \frac{2}{r_{3,2}}\right) + \mathfrak{T}_3\left(\frac{2}{r_{1,2}} + \frac{1}{r_{1,3}}\right)\right\}\delta V \\ + \left\{\frac{\mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_1}{r_{3,1}} + \frac{\mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_2}{r_{3,2}} + \mathfrak{T}_2\left(\frac{1}{r_{1,2}} + \frac{2}{r_{1,3}}\right) + \mathfrak{T}_1\left(\frac{2}{r_{2,3}} + \frac{1}{r_{2,1}}\right)\right\}\delta W; \end{array} \right.$$

nadto, abyśmy do przekształconego w ten sposób wypadku (19)

dodali jeszcze całkę pojedynczą wyrażenia (20). Znajdziemy więc ostatecznie

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int\int\int ds_1 ds_2 ds_3 \delta P = \int\int\int ds_1 ds_2 ds_3 (\Delta_1 P + \Delta_2 P) \\
&\quad + \int d\omega \left\{
\begin{aligned}
&(\mathfrak{N}_1 m + \mathfrak{T}_3 n + \mathfrak{T}_2 p)\delta U \\
&+ (\mathfrak{T}_3 m + \mathfrak{N}_2 n + \mathfrak{T}_1 p)\delta V \\
&+ (\mathfrak{T}_2 m + \mathfrak{T}_1 n + \mathfrak{N}_3 p)\delta W
\end{aligned}
\right\},
\end{aligned}
\right.
$$

gdzie $\Delta_1 P$ jest drugą stroną równania (21) a $\Delta_2 P$ drugą stroną równania (22).

LEKCYA XIII

Równania ruchu lub równowagi we współrzędnych krzywokreślnych. — Warunki na powierzchni. — Prawo układu izostatycznego. — Poszukiwanie powierzchni izostatycznych. — Powierzchnie i linie izodynamiczne. — Błony i włokna. — Powierzchnie izostatyczne i izodynamiczne w przypadku kuli ciśnień.

57. Równania ruchu lub równowagi we współrzędnych krzywokreślnych. — Nic teraz łatwiejszego jak wypisać równania ruchu każdego punktu ciała, we współrzędnych krzywokreślnych. Jakoż, według tych samych osi względem których oznaczyliśmy przez U, V, W rzuty odkształcania się ciała w punkcie M, oznaczmy przez F_1, F_2, F_3 składowe siły działającej na jednostkę jego massy, posiadającej gęstość ρ; różnice

$$\rho\left(F_1 - \frac{d^2U}{dt^2}\right) ds_1 ds_1 ds_3, \quad \rho\left(F - \frac{d^2V}{dt^2}\right) ds_1 ds_2 ds_3$$

$$\rho\left(F_3 - \frac{d^2W}{dt^2}\right) ds_1 ds_2 ds_3,$$

powinny być równe [II, **10**] odpowiednim współczynnikom δU, δV, δW pod całką potrójną w drugiej stronie równania (23)

[XII, **56**]. To daje, po opuszczeniu wspólnego czynnika $ds_1 ds_2 ds_3$,

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\mathfrak{N}_1}{ds_1}+\frac{d\mathfrak{T}_3}{ds_2}+\frac{d\mathfrak{T}_2}{ds_3}+\rho\left(F_1-\frac{d^2U}{dt^2}\right)= \\
&\frac{\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2}{r_{1,2}}+\frac{\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_3}{r_{1,3}}+\mathfrak{T}_3\left(\frac{1}{r_{2,3}}+\frac{2}{r_{2,1}}\right)+\mathfrak{T}_2\left(\frac{2}{r_{3,1}}+\frac{1}{r_{3,2}}\right), \\
&\frac{d\mathfrak{T}_3}{ds_1}+\frac{d\mathfrak{N}_2}{ds_2}+\frac{d\mathfrak{T}_1}{ds_3}+\rho\left(F_2-\frac{d^2V}{dt^2}\right)= \\
&\frac{\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_3}{r_{2,3}}+\frac{\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_1}{r_{2,1}}+\mathfrak{T}_1\left(\frac{1}{r_{3,1}}+\frac{2}{r_{3,2}}\right)+\mathfrak{T}_3\left(\frac{2}{r_{1,2}}+\frac{1}{r_{1,3}}\right), \\
&\frac{d\mathfrak{T}_2}{ds_1}+\frac{d\mathfrak{T}_1}{ds_2}+\frac{d\mathfrak{N}_3}{ds_3}+\rho\left(F_3-\frac{d^2W}{dt^2}\right)= \\
&\frac{\mathfrak{N}_3-\mathfrak{N}_1}{r_{3,1}}+\frac{\mathfrak{N}_3-\mathfrak{N}_2}{r_{3,2}}+\mathfrak{T}_2\left(\frac{1}{r_{1,2}}+\frac{2}{r_{1,3}}\right)+\mathfrak{T}_1\left(\frac{2}{r_{2,3}}+\frac{1}{r_{2,1}}\right);
\end{aligned}
\right.
$$

równania *ruchu*; a po opuszczeniu jeszcze ilości $\frac{d^2U}{dt^2}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$, $\frac{d^2W}{dt^2}$, równania *równowagi*.

58. Warunki na powierzchni. — Współczynniki mnożące ilości δU, δV, δW pod całką pojedynczą w drugiej stronie równania (23), przedstawiają składowe, według normalnych do powierzchni współrzędnych, ciśnienia wywieranego w punkcie M na element $d\omega$ powierzchni ograniczającej ciało. Jeżeli powierzchnia ta składa się z części należących do trzech familij powierzchni współrzędnych (α_1, α_2, α_3), natenczas element $d\omega$ ma jedną z wartości: $ds_2 ds_3$, $ds_3 ds_1$, $ds_1 ds_2$, stosownie do tego, czy uważana część powierzchni ciała zawiera się w familii α_1, czy w familii α_2, czy nareszcie w familii α_3.

Ażeby, odpowiednio do tych trzech założeń, znaleźć ciśnienia na jednostkę elementu $d\omega$, należy w formułach

$$m\mathfrak{N}_1+n\mathfrak{T}_3+p\mathfrak{T}_2,$$
$$m\mathfrak{T}_3+n\mathfrak{N}_2+p\mathfrak{T}_1,$$
$$m\mathfrak{T}_2+n\mathfrak{T}_1+p\mathfrak{N}_3,$$

zrobić następujące założenia:

$m=1,\ n=0,\ p=0;\ m=0,\ n=1,\ p=0;\ m=0, n=0,\ p=1.$

Znajdujemy wtedy, że wszystkie części powierzchni ciała należące do familii α_1, doznają w każdym punkcie ciśnień mających za składowe

(2) $$\mathfrak{N}_1,\quad \mathfrak{T}_3,\quad \mathfrak{T}_2;$$

wszystkie części powierzchni ciała należące do familii α_2, doznają w każdym punkcie ciśnień mających za składowe

(3) $$\mathfrak{T}_3,\quad \mathfrak{N}_2,\quad \mathfrak{T}_1;$$

i nareszcie, wszystkie pozostałe części powierzchni ciała, należące do familii α_3, doznają w każdym punkcie ciśnień mających za składowe

(4) $$\mathfrak{T}_2,\quad \mathfrak{T}_1,\quad \mathfrak{N}_3.$$

Ciśnienia (2) zawierają tylko dwie zmienne α_2 i α_3, albowiem trzecia zmienna α_1 posiada wartość stałą. Każdej ilości stałej α_1 odpowiada każda grupa ciśnień (2); zatem tyle jest grup (2) na powierzchni ciała, wiele części tejże powierzchni należy do familii α_1.

Podane wypadki stosują się oczywiście do każdej z grup (3) i (4); należy tylko odróżnić, że grupa (3) zawiera dwie zmienne α_3 i α_1; grupa zaś (4) dwie zmienne α_1 i α_2.

Oznaczając wogóle przez $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{Q}_i$, $\mathfrak{R}_i$ składowe ciśnienia wywieranego na jednostkę elementu powierzchni α_i; to w ciele ograniczonem dwiema powierzchniami z familii α_1, dwiema z familii α_2 i dwiema z familii α_3, t, j. w ciele przedstawiającem czworościan krzywokreślny, warunki na powierzchni wyrażają się przez równania następujące:

(5) $$\begin{cases} (\mathfrak{N}_1)_{1,0}=(\mathfrak{P}_1)_{1,0},\ (\mathfrak{T}_3)_{1,1}=(\mathfrak{Q}_1)_{1,0},\ (\mathfrak{T}_2)_{1,0}=(\mathfrak{R}_1)_{1,0}; \\ (\mathfrak{T}_3)_{1,0}=(\mathfrak{P}_2)_{1,0},\ (\mathfrak{N}_2)_{1,0}=(\mathfrak{Q}_2)_{1,0},\ (\mathfrak{T}_1)_{1,0}=(\mathfrak{R}_2)_{1,0}; \\ (\mathfrak{T}_2)_{1,0}=(\mathfrak{P}_3)_{1,0},\ (\mathfrak{T}_1)_{1,0}=(\mathfrak{Q}_3)_{1,0},\ (\mathfrak{N}_3)_{1,0}=(\mathfrak{R}_3)_{1,0}, \end{cases}$$

napisane dwa razy, raz z samym znakiem 1 drugi raz z samym znakiem 0; $(\mathfrak{P}_i)_1$, $(\mathfrak{Q}_i)_1$, $(\mathfrak{R}_i)_1$ oznaczają wtedy składowe ciśnienia danego na jednej z powierzchni ograniczających ciało z familii α_i; $(\mathfrak{P}_i)_0$, $(\mathfrak{Q}_i)_0$, $(\mathfrak{R}_i)_0$, są składowemi ciśnienia danego na drugiej z tych powierzchni. Zresztą, nastręczają się tutaj te same uwagi któreśmy poprzednio [III, **13**, **14**] wyłożyli.

59. Prawo układu izostatycznego. — Wyraziwszy równania ruchu lub równowagi wewnątrz danego ciała we współrzędnych krzywokreślnych, dopięliśmy przez to jednego ważnego celu; albowiem wiele zadań niemożliwych do rozwiązania we współrzędnych prostokreślnych, będziemy mogli rozwiązać w układzie krzywokreślnym, dobierając tylko stosownie do okoliczności odpowiednią jego naturę. Lecz oprócz tego celu pozostaje jeszcze inny równie ważny, t. j. wynalezienie *prawa układu izostatycznego i sposobu poszukiwania powierzchni izostatycznych*.

Wiadomo z określenia powierzchni izostatycznych [IX, **39**], że w każdem ciele istnieje wogóle jedyny układ trzech familij powierzchni izostatycznych, odpowiednio do jednego w każdym punkcie układu prostokątnego trzech płaskich elementów, podległych samym tylko ciśnieniom normalnym głównym. Wziąwszy go za układ współrzędnych krzywokreślnych, ilości α_i stają się oczywiście parametrami powierzchni izostatycznych a ciśnienia styczne $\mathfrak{T}_i$ są wszędzie zerami. Wtedy istnieją tylko ciśnienia normalne $\mathfrak{N}_i$, które zamieniwszy się na ciśnienia główne A_i, będące pierwiastkami równania (14) [V, **22**], przedstawiają w każdym punkcie ciała kierunki i wielkości osi elipsoidy ciśnień. Równania zatem ogólne (1), uproszczone w ten sposób, wyobrażają prawo powierzchni izostatycznych.

Wykonywając to uproszczenie należy założyć

$$\mathfrak{N}_1 = A_1, \quad \mathfrak{N}_2 = A_2, \quad \mathfrak{N}_3 = A_3,$$

$$\mathfrak{T}_1 = 0, \quad \mathfrak{T}_2 = 0, \quad \mathfrak{T}_3 = 0,$$

a zastąpiwszy jeszcze nawiasy

$$\left(F_1 - \frac{d^2U}{dt^2}\right), \left(F_2 - \frac{d^2V}{dt^2}\right), \left(F_3 - \frac{d^2W}{dt^2}\right)$$

przez odpowiednie głoski F_1, F_2, F_3, grupa (1) zamienia się na układ równań

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dA_1}{ds_1} + \rho F_1 = \dfrac{A_1 - A_2}{r_{1,2}} + \dfrac{A_1 - A_3}{r_{1,3}}, \\ \dfrac{dA_2}{ds_2} + \rho F_2 = \dfrac{A_2 - A_3}{r_{2,3}} + \dfrac{A_2 - A_1}{r_{2,1}}, \\ \dfrac{dA_3}{ds_3} + \rho F_3 = \dfrac{A_3 - A_1}{r_{3,1}} + \dfrac{A_3 - A_2}{r_{3,2}}, \end{cases}$$

wyrażających to jedyne prawo, króreby można nazwać twierdzeniem Lame'go: *że w każdym układzie izostatycznym, każde z trzech ciśnień głównych doznaje według własnego kierunku zmiany, która powiększona składową według tego samego kierunku siły działającej na massę, jest równa summie nadmiarów tego ciśnienia nad dwa pozostałe, pomnożonych przez odpowiednie krzywości powierzchni izostatycznej ulegającej temu ciśnieniu.*

A zatem, jeżeli chcemy ażeby dany układ trzech familij powierzchni wzajemnie prostopadłych był układem izostatycznym, wystarczy w takim razie dać tylko natężenia ciśnień głównych w jednym punkcie M; albowiem za pomocą prawa (6), znajdziemy natężenia tych ciśnień w sześciu punktach sąsiednich położonych z jednej i drugiej strony punktu M na łuku ds_i a postępując w ten sposób dalej znajdziemy wszystkie ciśnienia główne w całej uważanej przestrzeni.

Jednem słowem, prawo, tak łatwo wyrażone za pomocą elipsoidy ciśnień, daje ciśnienia wywierane w jednym punkcie, za pomocą trzech z pomiędzy nich; następnie zaś, prawo nie mniej proste, wyrażające się za pomocą równań (6), pozwala wyznaczyć ciśnienia we wszystkich pozostałych punktach. To

ostatnie prawo było więc koniecznem, albowiem bez niego, zjawisko równowagi wewnątrz ciała niesztywnego, pozostałoby niezupełnie oznaczone.

60. Poszukiwanie powierzchni izostatycznych. — Wypowiedziane teraz uwagi Lame'go stają się oczywistszemi szukając powierzchni izostatycznych. Przypuśćmy w tym celu że umieliśmy zcałkować równania (4) i (5) [III, **12**] lub (6) [III, **14**] i (5) [**12**], w danym jakimkolwiek przypadku; wtedy funkcye u, v, w są zupełnie znanemi.

Założywszy

(7) $$x+u=x', \quad y+v=y', \quad z+w=z',$$

ilości x', y', z' wyobrażają współrzędne punktu ciała po jego odkształceniu się, podczas gdy ilości x, y, z, od których zależą funkcye u, v, w, są współrzędnemi tego samego punktu przed odkształceniem się.

Z trzech równań (7) można oczywiście wyznaczyć trzy ilości x, y, z w funkcyach trzech ilości x', y', z', a ztąd ciśnienia (N_i, T_i), które są funkcyami ilości x, y, z i $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$, wyrażają się ostatecznie przez x', y', z'.

To mając, przypomnijmy teraz, że ciśnienia główne A_1, A_2, A_3 są pierwiastkami równania (14) [V, **22**] i jako takie wyrażają się również przez funkcye zmiennych x', y', z'. Oznaczając którekolwiek z tych ciśnień przez A_i i zakładając

$$m_i = \frac{1}{(A_i - N_1)T_1 + T_2T_3}, \quad n_i = \frac{1}{(A_i - N_2)T_2 + T_3T_1},$$

$$p_i = \frac{1}{(A_i - N_3)T_2 + T_1T_2},$$

płaszczyzna, poprowadzona przez punkt (x', y', z') prostopadle

do kierunku ciśnienia głównego A_i, ma za równanie [**22**, (17)]

$$m_i(X - x') + n_i(Y - y') + p_i(Z - z') = 0,$$

rozumiejąc przez X, Y, Z współrzędne bieżące płaszczyzny.

Lecz ta sama płaszczyzna jest zarazem płaszczyzną styczną w punkcie (x', y', z') do powierzchni izostatycznej

$$f_i(x', y', z') = \alpha_i;$$

równanie więc jej wyraża się jeszcze jak następuje:

$$\frac{d\alpha_i}{dx'}(X - x') + \frac{d\alpha_i}{dy'}(Y - y') + \frac{d\alpha_i}{dz'}(Z - z') = 0;$$

zkąd wypadają związki

$$(8) \qquad \frac{\frac{d\alpha_i}{dx'}}{m_i} = \frac{\frac{d\alpha_i}{dy'}}{n_i} = \frac{\frac{d\alpha_i}{dz'}}{p_i} = \frac{h_i}{R_i},$$

gdzie h_i oznacza parametr różniczkowy pierwszego rzędu niezmiennika α_i, i

$$R_i = +\sqrt{m_i^2 + n_i^2 + p_i^2}.$$

Ze stosunków (8), które można także zastąpić przez równania

$$(9) \qquad \frac{d\alpha_i}{dx'} = h_i\frac{m_i}{R_i}, \quad \frac{d\alpha_i}{dy'} = h_i\frac{n_i}{R_i}, \quad \frac{d\alpha_i}{dz'} = h_i\frac{p_i}{R_i},$$

otrzymuje się tylko trzy ilości $\frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dx'}$, $\frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dy'}$, $\frac{1}{h_i}\frac{d\alpha_i}{dz'}$, wyobrażające dostawy kątów które normalna do powierzchni α_i tworzy z osiami współrzędnych, co również dowodzi, że same wartości i kierunki ciśnień głównych w każdym punkcie ciała, nie wystarczają jeszcze do wyznaczenia powierzchni izostatycznych; uwaga prowadząca w gruncie do tego samego wyniku, któryśmy w końcu poprzedniego ustępu z Lamégo przytoczyli.

Chcąc zatem wyznaczyć powierzchnie izostatyczne potrzeba się udać do równań (6). Którebądź z nich napisać można jak następuje

$$\frac{dA_i}{ds_i} + \rho F_i = \frac{A_i - A_j}{r_{i,j}} + \frac{A_i - A_k}{r_{i,k}},$$

a zważywszy że jest [IX, **44**, (11)], [XI, **51**, (10)]

$$ds_i = \frac{d\alpha_i}{h_i}, \quad \frac{1}{r_{i,j}} = \frac{h_i}{h_j}\frac{dh_j}{d\alpha_i}, \quad \frac{1}{r_{i,k}} = \frac{h_i}{h_k}\frac{dh_k}{d\alpha_i},$$

mamy również

$$(10) \qquad h_i\frac{dA_i}{d\alpha_i} + \rho F_i = \frac{h_i(A_i - A_j)}{h_j}\frac{dh_j}{d\alpha_i} + \frac{h_i(A_i - A_k)}{h_k}\frac{dh_k}{d\alpha_i},$$

Ponieważ A_i, h_j, h_k są funkcyami zmiennych x', y', z', jest oczywiście

$$\frac{dA_i}{d\alpha_i} = \frac{dA_i}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha_i} + \frac{dA_i}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha_i} + \frac{dA_i}{dz'}\frac{dz'}{d\alpha_i},$$

$$\frac{dh_j}{d\alpha_i} = \frac{dh_j}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha_i} + \frac{dh_j}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha_i} + \frac{dh_j}{dz'}\frac{dz'}{d\alpha_i},$$

$$\frac{dh_k}{d\alpha_i} = \frac{dh_k}{dx'}\frac{dx'}{d\alpha_i} + \frac{dh_k}{dy'}\frac{dy'}{d\alpha_i} + \frac{dh_k}{dz'}\frac{dz'}{d\alpha_i},$$

a z przyczyny równań [X, **45**, (1)]

$$\frac{dx'}{d\alpha_i} = \frac{1}{h_i^2}\frac{d\alpha_i}{dx'}, \quad \frac{dy'}{d\alpha_i} = \frac{1}{h_i^2}\frac{d\alpha_i}{dy'}, \quad \frac{dz'}{d\alpha_i} = \frac{1}{h_i^2}\frac{d\alpha_i}{dz'}$$

i równań (9), znajdujemy bardzo łatwo, zamiast równania (10), równanie następujące

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & m_i\frac{dA_i}{dx'} + n_i\frac{dA_i}{dy'} + p_i\frac{dA_i}{dz''} + \rho R_i F_i \\ & = m_i\left(\frac{A_i - A_j}{h_j}\frac{dh_j}{dx'} + \frac{A_i - A_k}{h_k}\frac{dh_k}{dx'}\right) \\ & + n_i\left(\frac{A_i - A_j}{h_j}\frac{dh_j}{dy'} + \frac{A_i - A_k}{h_k}\frac{dh_k}{dy'}\right) \\ & + p_i\left(\frac{A_i - A_j}{h_j}\frac{dh_j}{dz'} + \frac{A_i - A_k}{h_k}\frac{dh_k}{dz'}\right). \end{aligned} \right.$$

Uważmy także że ilość F_i przedstawia składową, według normalnej do powierzchni α_i, siły działającej w punkcie $(x'$, y', $z')$ na jednostkę massy ρ. Składowemi tej siły, według osi prostokątnych (x', y', z'), są ilości X_0, Y_0, Z_0, [IV, **17,** (1)], mamy zatem, na mocy równań (9),

$$R_i F_i = m_i X_0 + n_i Y_0 + p_i Z_0.$$

Zastępując w równaniu (11) ilość $R_i F_i$ przez drugą stronę otrzymanego teraz równania i zakładając

$$\varphi_j = \text{log. nep. } h_j, \qquad \varphi_k = \text{log. nep.} h_k,$$

znajdziemy bardzo łatwo

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & m_i \left(\frac{dA_i}{dx'} - \rho X_0\right) + n_i \left(\frac{dA_i}{dy'} - \rho Y_0\right) + p_i \left(\frac{dA_i}{dz'} - \rho Z_0\right) \\ & = m_i \left\{ (A_i - A_j) \frac{d\varphi_j}{dx'} + (A_i - A_k) \frac{d\varphi_k}{dx'} \right\} \\ & + n_i \left\{ (A_i - A_j) \frac{d\varphi_j}{dy'} + (A_i - A_k) \frac{d\varphi_k}{dy'} \right\} \\ & + p_i \left\{ (A_i - A_j) \frac{d\varphi_j}{pz'} + (A_i - A_k) \frac{d\varphi_k}{dz'} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Równanie (12) przedstawia właściwie trzy jednoczesne równania, z których otrzymuje się każde zastępując po kolei trzy znaczki i, j, k przez 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2.

W tak otrzymanych równaniach ilości A_i, m_i, n_i, p_i, X_0, Y_0, Z_0 są funkcyami danemi zmiennych x', y', z'; ilości zaś φ_i są funkcyami nieznanemi tych samych zmiennych. Na wyznaczenie więc trzech funkcyi φ_i posiadamy trzy jednoczesne cząstkowe równania (12) rzędu pierwszego.

Dla tej przyczyny, w funkcye φ_i, t. j. w całki rownań (12), wejdą funkcye dowolne. Ażeby je wyznaczyć, powróćmy do równań (9), które dają najpierw

$$(13) \qquad d\alpha_i = h_i \left(\frac{m_i}{R_i} dx' + \frac{n_i}{R_i} dy' + \frac{p_i}{R_i} dz'\right),$$

a następnie, na mocy równości $ds_i = \frac{d\alpha_i}{h_i}$,

$$ds_i = \frac{m_i}{R_i} dx' + \frac{n_i}{R_i} dy' + \frac{p_i}{R_i} dz.$$

Zważywszy że druga strona napisanego teraz równania jest różniczką zupełną, znajdujemy, wprowadzając tensam warunek do równania poprzedniego:

$$n_i \frac{dh_i}{dz'} = p_i \frac{dh_i}{dy'}, \quad p_i \frac{dh_i}{dx'} = m_i \frac{dh_i}{dz'}, \quad m_i \frac{dh_i}{dy'} = n_i \frac{dh_i}{dx'},$$

a dzieląc przez h_i i pamiętając na założony wyżej związek

$$\varphi_i = \log \text{nep}\, h_i,$$

(14) $$n_i \frac{d\varphi_i}{dz'} = p_i \frac{d\varphi_i}{dy'}, \quad p_i \frac{d\varphi_i}{dx'} = m_i \frac{d\varphi_i}{dz'}, \quad m_i \frac{d\varphi_i}{dy'} = n_i \frac{d\varphi_i}{dx'}.$$

Każda więc z całek φ_i równań (12) zadosyć czyni warunkom (14), co pozwala wyznaczyć naturę funkcyi dowolnych, weszłych z całkowania równań (12).

Mając tak wyznaczone funkcye φ_i znajdziemy następnie

$$h_i = e^{\varphi_i},$$

a całka różniczki (13) daje równanie

(15) $$\alpha_i = f_i(x', y', z')$$

powierzchni izostatycznej.

Jeżeli w składowe X_0, Y_0, Z_0 wchodzą także siły bezwładności, w drugiej stronie równań zawartych w (15) wchodzi zmienna t wyobrażająca czas; powierzchnie więc izostatyczne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zawierają w sobie parametr zmienny t i przedstawiają coraz inny układ z upływem czasu. Jeżeli zaś składowe X_0, Y_0, Z_0 nie zawierają w sobie składowych siły bezwładności, t. j. jeżeli jesteśmy w przypadku równowagi, drugie strony równań

(15) nie zależą od zmiennej t, ale tylko od trzech ilości x', y', z', przedstawiających współrzędne punktu ciała po jego odkształceniu się (7). W każdym z tych przypadków, trzy równania zawarte w (15) dają

$$x' = \Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$y' = \Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$z' = \Phi_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

t. j. współrzędne prostokątne każdego punktu ciała, w czasie jego odkształcania się lub po odkształceniu, stosownie do tego, czy uważamy przypadek ruchu czy przypadek równowagi.

61. Powierzchnie i linie izodynamiczne. — Zatrzymawszy definicyę powierzchni izostatycznych, jako powierzchni ulegających samym tylko ciśnieniom normalnym głównym, nazwiemy *powierzchnią izodynamiczną* taką powierzchnię, która ulega jednocześnie ciśnieniom normalnym i jednakowego natężenia we wszystkich jej punktach. Prawo istnienia jedynego tylko układu trzech familij powierzchni izostatycznych, dowodzi oczywiście, że wogóle powierzchnie izodynamiczne nie istnieją; a istniałyby tylko wtenczas, gdyby niektóre lub każda z powierzchni izostatycznych ulegała ciśnieniom jednakowego natężenia we wszystkich jej punktach, co wymaga już pewnych szczególnych warunków.

Dwie powierzchnie izodynamiczne przecinają się podług pewnej krzywej, którą nazwiemy *linią izodynamiczną*.

62. Błony i włókna. — Zamieścimy jeszcze dwa godne uwagi wyniki z równań (6). Otrzymuje się z tych równań warunki równowagi błony o grubości jednakowej ds_3 : obie powierzchnie błony równoległe do jej powierzchni środkowej, są dwiema powierzchniami niekończenie sąsiedniemi, które można uważać jako należące do jednej (α_3) z trzech familij powierzchni układu krzywokreślnego ; ich wspólna normalna

jest elementem prostolinijnym ds_3, co daje:

$$\frac{1}{r_{1,3}}=0,\ \frac{1}{r_{2,3}}=0.$$

Ponieważ tak uważana powierzchnia α_3 żadnym ciśnieniom nie ulega, jest oczywiście

$$A_3=0,\ \frac{dA_3}{ds_3}=0,$$

i równania (6), w ten sposób uproszczone, dają:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{dA_1}{ds_1}+\rho F_1=\dfrac{A_1-A_2}{r_{1,2}}, \\ \dfrac{dA_2}{ds_2}+\rho F_2=\dfrac{A_2-A_1}{r_{2,1}}, \\ \dfrac{A_1}{r_{3,1}}+\dfrac{A_2}{r_{3,2}}+\rho F_3=0, \end{cases}$$

warunki równowagi w każdym punkcie uważanej błony.

Warunki równowagi włókna o przecięciu stałem są również zawartemi w równaniach (6). Załóżmy że oś krzywa włókna jest skierowaną według krzywej s_1; przecięcie jego normalne jest elementem płaskim $ds_2\, ds_3$ powierzchni α_1, nieposiadającym żadnej krzywości: mamy wtenczas

$$\frac{1}{r_{1,2}}=0,\ \frac{1}{r_{1,3}}=0.$$

Ponieważ powierzchnia boczna włókna nie doznaje żadnych ciśnień, jest również

$$A_2=0,\ \frac{dA_2}{ds_2}=0,\ A_3=0,\ \frac{dA_3}{ds_3}=0,$$

i równania (6) dają układ równań

$$(17)\quad \frac{dA_1}{ds_1}+\rho F_1=0,\ \frac{A_1}{r_{2,1}}+\rho F_2=0,\ \frac{A_1}{r_{3,1}}+\rho F_3=0,$$

wyrażających równowagę w każdym punkcie założonego włókna.

Z tego co powiedzieliśmy wogóle o powierzchniach izostatycznych i izodynamicznpch wynika bezpośrednio, że błona jest powierzchnią izodynamiczną a włókno linią izodynamiczną; albowiem jedno i drugie, niedoznając żadnych ciśnień na całej swojej powierzchni, doznają, mówiąc innemi słowy, ciśnień normalnych i jednakowych, bo równych zeru.

Dostrzega się również bardzo łatwo, że kształt równań (16) i (17) dogodnym jest tylko w traktowaniu prawdziwej równowagi. Jakoż, w przypadku ruchu ilości współrzędne błony lub włókna zmieniają się z czasem, jako parametry powierzchni i linij izodynamicznych; ruchu przeto do nich odnosić nie można jako do ilości zmiennych z upływem czasu. Tak więc, układ współrzędnych prostokreślnych przedstawia tutaj większe korzyści w przypadku ruchu; układ współrzędnych krzywokreślnych jest dogodniejszym jeżeli się traktuje przypadek równowagi błony lub włókna, dając odrazu twierdzenia (16) i (17), któreby trudnemi były do otrzymania we współrzędnych prostokreślnych.

63. Powierzchnie izostatyczne i izodynamiczne w przypadku kuli ciśnień. — Do szczególnych przypadków i godnych także uwagi, należy jeszcze ten w którym elipsoida ciśnień jest kulą. Wtedy należy oczywiście założyć

$$A_1 = A_2 = A_3 = p,$$

i równania (6) dają

$$(18) \qquad \frac{dp}{ds_1} + \rho F_1 = 0, \quad \frac{dp}{ds_2} + \rho F_2 = 0, \quad \frac{dp}{ds_3} + \rho F_3 = 0,$$

A zatem, jakakolwiek powierzchnia poprowadzona w ciele jest powierzchnią izostatyczną, gdyż każdy element płaski ulega tylko ciśnieniu normalnemu. Pomiędzy temi powierz-

chniami, znajduje się jedyna, która jest powierzchnią izodynamiczną. Ażeby znaleść równanie tej ostatniej powierzchni, uważmy najprzód że równania (18) zachowują ten sam kształt w układzie prostokreślnym; mamy więc także

$$\frac{dp}{dx} + \rho X_0 = 0, \quad \frac{dp}{dy} + \rho Y_0 = 0, \quad \frac{dp}{dz} + \rho Z_0 = 0,$$

rozumiejąc przez X_0, Y_0, Z_0 składowe, według osi prostokątnych x, y, z, siły działającej na jednostkę massy ρ. Ztąd znajduje się oczywiście

$$dp = \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = -\rho (X_0 dx + Y_0 dy + Z_0 dz),$$

a następnie

(19) $$p = F(x, y, z),$$

równanie powierzchni ulegającej we wszystkich punktach ciśnieniu normalnemu i jednakowemu p, t. j. równanie powierzchni izodynamicznej.

Łatwo jest zauważyć że powierzchnie *poziomu* w cieczach lub gazach są powierzchniami izodynamicznemi.

Na tem kończymy Dział Drugi niniejszego wykładu. Przedstawiając równania ruchu lub równowagi wewnątrz danego ciała pod innym kształtem jak w dziale pierwszym, dopełniliśmy już przez to samo zamierzonego celu. I rzeczywiście, równania te (1) wyrażają warunki ruchu lub równowagi we współrzędnych krzywokreślnych, ułatwiających bardzo często rozwiązanie zadań, którychby we współrzędnych prostokreślnych pokonać niepodobnem było; następnie, na mocy określenia powierzchni izostatycznych otrzymują się równania (6), wyrażające prawa tych powierzchni, prawa, bez których definicya równowagi wewnątrz ciała naturalnego byłaby niezupełną; nareszcie, znajdują się twierdzenia (16) i (17) charakteryzujące geometrycznie błony i włókna i uzupełniające w ten sposób to, cośmy wyżej nazwali głównym ich charakterem.

LEKCYA XIV

Metoda dynamiczna. — Summa sił żywych odkształcania się układu mechanicznego. — Definicya płynu. — Summa sił żywych odkształcania się jednostki objętości elementu płynu. — Obliczenie współczynników wielomianu $\mathfrak{T}$. — Inny pogląd na wielomian $\mathfrak{T}$.

64. Metoda dynamiczna. — Badania które dotąd przeprowadziliśmy, polegają głównie na znajomości praw odkształcania się jednostki nieskończenie małego elementu $dx\,dy\,dz$ i na definicyi pracy mechanicznej zużytej na to odkształcenie się. Widzieliśmy że owa praca zależy od tych samych ilości, za pomocą których wyrażają się odkształcenia jednostki pomienionego elementu [II, **8**, (7)], ostatecznie zaś, sprowadza się do funkcyi sześciu parametrów elipsoidy odkształceń [III, **12**, (3)], t. j. sześciu ilości

$$\frac{du}{dx},\ \frac{dv}{dy},\ \frac{dw}{dz},\ \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\ \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz},\ \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx},$$

w których trzy funkcye u, v, w zależą od czterech zmiennych *niezależnych* x, y, z, t i posiadają tego rodzaju znaczenie geometryczne że ilości :

$$x+u,\ y+v,\ z+w,$$

są współrzędnemi punktu M na końcu czasu t.

Taki zrobiwszy początek otrzymaliśmy ogólne równania ruchu lub równowagi w każdym punkcie ciała, i następnie, przyszliśmy do pewnych wniosków streszczających ogólne

własności tego ruchu lub równowagi wewnątrz ciał niesztywnych. Lecz metoda ta, jakkolwiek z wielu względów bardzo dogodna, nie pozwala jednak wprowadzić do otrzymanych wypadków podziału ciał na *stałe*, *ciekłe i gazowe*, podziału tak charakterystycznie przedstawiającego się w naturze. Ażeby i tego celu dopiąć, weźmiemy za podstawę, do rozwiązania głównego zadania mechaniki cząsteczkowej, trzy funkcye (u, v, w) czterech zmiennych (x, y, z, t) wyobrażające rzuty prędkości punktu M (x, y, z). Zmienne x, y, z są wtedy funkcyami czasu t i cztery ilości (x, y, z, t) od których zależą funkcye u, v, w nie są już, jak w poprzedzającej metodzie, pomiędzy sobą niezależnemi. Mówiąc więc treściwie, trzy funkcye u, v, w wyobrażały poprzednio odkształcanie się w danym punkcie ciała i zależały od czterech zmiennych *niezależnych* (x, y, z, t); obecnie, trzy funkcye u, v, w wyobrażają rzuty prędkości, z którą się ciało w danym punkcie odkształca, i zależą także od czterech zmiennych (x, y, z, t); lecz trzy z tych zmiennych, t. j. x, y, z, zależą od czwartej zmiennej, t. j. od czasu t. Za pomocą metody pierwszej traktuje się jednocześnie ruch i równowagę; albowiem funkcye u, v, w, jako przedstawiające odkształcenia, mogą mieć wartości różne od zera, tak dobrze w przypadku ruchu jak i w przypadku spoczynku. Za pomocą metody drugiej można rozważać tylko jedyny przypadek ruchu; gdyż funkcye v, u, w, jako wyobrażające prędkości, w przypadku spoczynku nie istnieją. Ztąd możnaby nazwać metodę pierwszą, *metodą statyczną*; metodę zaś drugą *metodą dynamiczną*.

65. Summa sił żywych odkształcania się układu mechanicznego.—Metoda dynamiczna polega na pewnem twierdzeniu, lub właściwiej na pewnej zasadzie, należącej do mechaniki analitycznej i dotąd, o ile nam się zdaje, jeszcze niespostrzeżonej. Zasada ta wynika z uważania następującego.

Wyobraźmy sobie pewną liczbę punktów materyalnych, ma-

jących za massy:

$$m, m' \dots ;$$

za współrzędne prostokątne, w czasie t :

$$x, y, z, x', y', z', \dots$$

za rzuty, na osie współrzędnych, prędkości w czasie t :

$$u, v, w, u', v', w', \dots$$

W ten sposób poruszający się zbiór punktów materyalnych uważać można za układ mechaniczny najogólniejszy, którego summa sił żywych wyraża się przez formułę

$$\Sigma \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2),$$

gdzie znak summowania Σ rozciąga się do wszystkich punktów materyalnych. Summie tej można nadać inną postać, dogodniejszą do celu jaki założyliśmy.

I tak, zauważmy najprzód że jest tożsamościowo

$$\Sigma \frac{1}{2} mu^2 = \frac{(\Sigma mu)^2 + \Sigma m \, \Sigma mu^2 - (\Sigma mu)^2}{2\Sigma m};$$

i następnie, że jest również tożsamościowo, po wykonaniu wskazanych działań:

$$\Sigma m \, \Sigma mu^2 - (\Sigma mu)^2 =$$

$$\Sigma m^2 u^2 + \sum mm'(u^2 + u'^2) - \Sigma m^2 u^2 - 2 \sum mm' uu' =$$

$$\sum mm'(u - u')^2.$$

Dwa znaki summowania, Σ i $\sum$, odróżniają tutaj liczbę wyrazów do których się odnoszą. Jeżeli układ składa się z n punktów, znak Σ odnosi się do n wyrazów, t. j. do tylu, wiele

jest punktów w układzie; znak $\sum$ odnosi się w takim razie do $\frac{n(n-1)}{2}$ wyrazów, t. j. do tylu, wiele jest podwójnych kombinacyj z n punktów.

Na zasadzie ostatniej tożsamości, tożsamość pierwsza zamienia się na następującą:

$$\Sigma \frac{1}{2} mu^2 = \frac{(\Sigma mu)^2 + \sum mm'(u-u')^2}{2\Sigma m},$$

i summę sił żywych przedstawić można przez drugą stronę równania

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \frac{1}{2} m(u^2+v^2+w^2) = \\ \frac{1}{2\Sigma m} \left\{ \begin{array}{c} (\Sigma mu)^2 + (\Sigma mv)^2 + (\Sigma mw)^2 \\ + \sum mm'[(u-u')^2 + (v-v')^2 + (w-w')^2] \end{array} \right\} . \end{array} \right.$$

To mając, załóżmy teraz

$$\mathrm{R} = + \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$x - x' = \frac{x-x'}{\mathrm{R}} . \mathrm{R} = a\mathrm{R},$$

$$y - y' = \frac{y-y'}{\mathrm{R}} . \mathrm{R} = b\mathrm{R},$$

$$z - z' = \frac{z-z'}{\mathrm{R}} . \mathrm{R} = c\mathrm{R},$$

i uważmy że jest

$$\frac{d(x-x')}{dt} = u - u', \quad \frac{d(y-y')}{dt} = v - v', \quad \frac{d(z-z')}{dt} = w - w'.$$

Wtedy znajduje się bez trudności:

$$u-u'=a\frac{dR}{dt}+R\frac{da}{dt},$$

$$v-v'=b\frac{dR}{dt}+R\frac{db}{dt},$$

$$w-w'=c\frac{dR}{dt}+R\frac{dc}{dt}.$$

Zważywszy że ilości a, b, c zadość czynią dwom warunkom:

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

$$a\frac{da}{dt}+b\frac{db}{dt}+c\frac{dc}{dt}=0;$$

trzy ostatnie równania dają:

$$(2)\qquad \frac{dR}{dt}=a(u-u')+b(v-v')+c(w-w')$$

$$(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2=$$

$$R^2\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right]+\left(\frac{dR}{dt}\right)^2$$

i równanie (2) można jeszcze napisać jak następuje:

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{c} \Sigma\frac{1}{2}m(u^2+v^2+w^2)= \\ \frac{1}{2\Sigma m}\left\{\begin{array}{c}(\Sigma mu)^2+(\Sigma mv)^2+(\Sigma mw)^2 \\ +\sum mm'R^2\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right] \\ +\sum mm'\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\end{array}\right\}\end{array}\right.$$

Pod takim kształtem podstawiona summa sił żywych układu,

zawiera w sobie inne elementa jak wtedy gdy się wyraża przez składowe u, v, w prędkości każdego punktu. Jakoż, łatwo jest zauważyć że ilości $\frac{\Sigma mu}{\Sigma m}$, $\frac{\Sigma mv}{\Sigma m}$, $\frac{\Sigma mu}{\Sigma m}$ są składowemi prędkości środka ciężkości układu; że ilość R przedstawia odległość wzajemną którychkolwiek dwóch punktów układu, a zatem, $\frac{d\mathrm{R}}{dt}$ jest prędkością z którą się zmienia taż odległość; że nareszcie ilości a, b, c oznaczają dostawy kątów które kierunek R tworzy z osiami współrzędnych, a zatem $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ są prędkościami z któremi zmieniają się te dostawy.

Ten nowy kształt summy sił żywych układu jest bardzo dogodnym wtedy jeżeli chcemy robić pewne szczególne założenia o układzie. I tak, chcąc otrzymać summę sił żywych układu *sztywnego* dosyć jest założyć w równaniu (3) $\frac{d\mathrm{R}}{dt}=0$; albowiem warunek że wzajemne odległości punktów składających układ są niezmiennemi, jest zupełnie wystarczającym w celu uczynienia go sztywnym. Mamy zatem dla układu sztywnego:

$$\Sigma \frac{1}{2} m(u^2+v^2+w^2)=$$

$$\frac{1}{2\Sigma m}\left\{\begin{array}{c}(\Sigma mu)^2+(\Sigma mv)^2+(\Sigma mw)^2\\ +\sum mm'\mathrm{R}^2\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right]\end{array}\right\}.$$

Uwaga ta prowadzi jeszcze do wniosku, stanowiącego istotę naszego twierdzenia. Oczywistem jest, że założenie sztywności układu równoważy się z założeniem niemożliwości jego odkształcania się, z tąd zaś wypada że pzędkości $\frac{d\mathrm{R}}{dt}$, które dla układu sztywnego stają się zerami, odpowiadają tylko samemu odkształcaniu się. Również jest widocznem że summa sił ży-

wych odpowiadających summie odkształcania się, powinna zależyć tylko od odpowiednich prędkości, t. j. od $\frac{dR}{dt}$. Oznaczając więc przez $\mathfrak{E}$ wartość tej summy i zastępując $\frac{dR}{dt}$ jego wartością (2), mieć będziemy:

$$(4)\quad \mathfrak{E} = \begin{cases} = \dfrac{\sum mm'\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2}{2\Sigma m} \\ = \dfrac{\sum mm'[a(u-u')+b(v-v')+c(w-w')]^2}{2\Sigma m} \end{cases}$$

Formuła (4) przedstawia summę sił żywych odkształcania się układu i stanowi wyżej zapowiedziane twierdzenie, którego wysłowienie jest zbytecznem.

Zastosowanie twierdzenia (4) do rozwiązania głównego zadania mechaniki cząsteczkowej, stanowi *metodę dynamiczną*. Możność użycia tej metody polega na następującej definicyi.

66. Definicya płynu. — Nazwiemy *płynem* materyę ciągłą, która może zmieniać swój kształt bez przestania być ciągłą.

Jeżeli x, y, z wyobrażają współrzędne prostokątne punktu płynu w czasie t, wtedy $dx\,dy\,dz$ jest objętością w czasie t nieskończenie małego elementu płynu, lub krócej, *elementu płynu*.

Wziąwszy za definicyę massy współczynnik siły bezwładności [II, **6**], oznaczmy przez dm massę płynu odpowiednią objętości $dx\,dy\,dz$. Granica stosunku massy do objętości, $\frac{dm}{dx\,dy\,dz} = \rho$, gdy objętość $dx\,dy\,dz$ nieograniczenie maleje, nazywa się *gęstością* płynu w punkcie $M(x, y, z)$ i w czasie t. Ztąd massą elementu płynu w czasie t jest $\rho\,dx\,dy\,dz$.

To wiedząc, wyobraźmy sobie że cała massa płynu w czasie t jest podzieloną na elementa $dx dy dz$, przez poprowadzenie nieskończonej liczby płaszczyzn równoległych do płaszczyzn współrzędnych. Wtedy $\rho dx dy dz$ wyobraża massę jednego z takich elementów. Zmieniwszy nieskończenie mało kształt całej massy płynu, przyrost jakiego nabywa massa elementu wyraża się przez $\delta(\rho dx dy dz)$. Lecz że odkształcenie się nieskończenie małe całej massy, jest wynikiem odkształcenia się elementów $dx dy dz$, każdy z tych elementów zachowa massę stałą, co się wyraża analitycznie, zakładając

$$\delta(\rho dx dy dz) = 0.$$

Wykonawszy wskazane różniczkowanie, następnie, przestawiwszy znaki δ i d, nareszcie, podzieliwszy otrzymany wypadek przez $dx dy dz$, znajduje się bardzo łatwo:

$$\delta\rho + \rho\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right) = 0.$$

Jeżeli pomienione odkształcenie nastąpiło w skutek przyrostu czasu δt, wtedy mamy

$$\delta\rho = \frac{d\rho}{dt}\delta t + \frac{d\rho}{dx}\delta x + \frac{d\rho}{dy}\delta y + \frac{d\rho}{dz}\delta z,$$

albowiem gęstość ρ zależy wogóle od czterech zmiennych x, y, z, t, z których trzy zmienne x, y, z, zależą od czwartej t. Na mocy tego, równanie poprzedzające przybiera postać:

$$\frac{d\rho}{dt}\delta t + \frac{d\rho\delta x}{ax} + \frac{d\rho\delta y}{dy} + \frac{d\rho\delta z}{dz} = 0.$$

Co do ilości $\delta x, \delta y, \delta z$, te wyznaczają się jak następuje: nazywając przez u, v, w składowe prędkości w punkcie $M(x, y, z)$ mamy, jak wiadomo z mechaniki,

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w;$$

u, v, w należy uważać, podobnie jak ρ, za funkcye czterech zmiennych x, y, z, t. Ilości więc δx, δy, δz jako przyrosty współrzędnych x, y, z, nabyte w skutek przyrostu czasu wyrażają się :

$$\delta x = u\delta t, \qquad \delta y = v\delta t, \qquad \delta z = w\delta t,$$

i równanie nasze przyjmuje kształt:

$$(5) \qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho u}{dx} + \frac{d\rho v}{dy} + \frac{d\rho w}{dz} = 0.$$

Równanie (5) znane jest w elementarnych mechanikach pod imieniem *równania ciągłości*; my nazwalibyśmy go raczej *równaniem stałości massy*. Oczywistem jest że definicya płynu zawiera się głównie w równaniu (5), na mocy którego płyn może się odkształcać ze zmianą nawet jego objętości, t.j. ze zmniejszeniem się tej objętości, lub jej powiększaniem bez przestania być ciągłym. Jakoż, podług tego równania możność zmieniania się objętości płynu posiada każdy jego element; a ponieważ płyn składa się, w każdej chwili, sposobem ciągłym z tych elementów, nie przestaje więc być ciągłym pomimo że każdy z nich zmieni swoją objętość. Lecz wtedy i cała massa płynu zmieni swoją objętość.

Nadmieniamy w końcu, że nie należy mięszać dwóch różnych pojęć, t. j. *płynu i cieczy*; przez nadanie tylko płynowi pewnych szczególnych własności, możemy otrzymać ciecz. Płyn jest więc niejako matematycznym materyałem z którego utworzyć można jakiebądź ciało, wprowadzając odpowiednie ku temu celowi warunki.

67. Summa sił żywych odkształcania się jednostki objętości elementu płynu. — Zastosujmy teraz twierdzenie zawarte w równaniu (4) do jednostki objętości nieskończenie małego elementu płynu. Zastosowanie to jest wogóle możebnem, albowiem jednostka elementu posiada wymiary skoń-

czone. W tym celu, przedstawmy równanie (4) pod postacią

$$(6)\quad \mathfrak{T}=\begin{cases} =\dfrac{\sum m'm''[a(u'-u'')+b(v'-v'')+c(w'-w'')]^2}{2\Sigma m}, \\[2ex] =\dfrac{\sum m'm''\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2}{2\Sigma m}, \end{cases}$$

i oznaczmy przez h', k', l', i h'', k'', l'' rzuty, na osie x, y, z, odległości dwóch którychkolwiek punktów m' i m'', należących do elementu płynu, od jego środka ciężkości $M(x, y, z)$.

Jeżeli u, v, w są składowemi prędkości środka ciężkości M; u', v', w' skłakowemi prędkości punktu m'; u'', v'', w'' składowemi prędkości punktu m''; wtedy mamy oczywiście:

$$u'=u+h'\frac{du}{dx}+k'\frac{du}{dy}+l'\frac{du}{dz},$$

. . . .

$$u''=u+h''\frac{du}{dx}+k''\frac{du}{dy}+l''\frac{du}{dz},$$

. . . .

albowiem ilości h', k', l' i h'', k'', l'' są nieskończenie małemi. Równania te dają:

$$(7)\quad \begin{cases} u'-u''=(h'-h'')\dfrac{du}{dx}+(k'-k'')\dfrac{du}{dy}+(l'-l'')\dfrac{du}{dz}, \\[2ex] v'-v''=(h'-h'')\dfrac{dv}{dx}+(k'-k'')\dfrac{dv}{dy}+(l'-l'')\dfrac{dv}{dz}, \\[2ex] w'-w''=(h'-h'')\dfrac{dw}{dx}+(k'-k'')\dfrac{dw}{dy}+(l'-l'')\dfrac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Uważmy teraz że ilości $h'-h''$, $k'-k''$, $l'-l''$ są rzutami, na osie x, y, z, wzajemnej odległości r dwóch punktów m'

i m''. Oznaczając przez a, b, c dostawy kątów utworzonych przez kierunek r z temiż osiami, jest oczywiście

(8) $$h'-h''=ar, \quad k'-k''=br, \quad l'-l''=cr,$$

i znajdujemy bez trudności

(9) $$\frac{dr}{dt}=a(u'-u'')+b(v'-v'')+c(w'-w'')=r\mathrm{U},$$

zakładając

(10) $$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{U}=a^2\frac{du}{dx}+b^2\frac{dv}{dy}+c^2\frac{dw}{dz} \\ &+bc\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)+ca\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)+ab\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right).\end{aligned}\right.$$

Wypadki te dowodzą, że każde dwa punkta elemeniu płynu, zbliżają się lub oddalają wzajemnie z prędkością $r\mathrm{U}$, proporcyonalną do ich wzajemnej odległości r i do czynnika U, zależnego od kierunku tej odległości, t. j. od dostaw a, b, c i od liczb $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, odnoszących się do środka ciężkości elementu.

W przypadku który rozbieramy, element płynu jest prostościanem, posiadającym za krawędzie dx, dy, dz. Ponieważ jednostka objętości elementu $dxdydz$ powinna być do niego podobną, za krawędzie tej jednostki należy wziąć ilości proporcyonalne do dx, dy, dz, t. j. $\frac{dx}{l}, \frac{dy}{l}, \frac{dz}{l}$. Liczba l wyznacza się z warunku, że objętość tego nowego prostoscianu jest równą jednosci, t. j.

$$\frac{dx}{l}\cdot\frac{dy}{l}\cdot\frac{dz}{l}=1,$$

co daje oczywiście

(11) $$l=\sqrt[3]{dx\,dy\,dz}.$$

Jeżeli więc r jest odległością wzajemną którychkolwiek dwóch punktów w objętości $dxdydz$, ilość

$$\frac{r}{l} = R.$$

mierzy odległość wzajemną odpowiednich dwóch punktów w jednostce objętości.

Ztąd wypada

$$r = lR \quad \text{i} \quad dr = ldR;$$

a zatem także

$$\frac{dR}{dt} = \frac{1}{l}\frac{dr}{dt} = \frac{r}{l}U, \tag{12}$$

na mocy równania (9).

Otóż, wstawiając tak znalezioną wartość $\frac{dR}{dt}$ w drugie z równań (6), znajdujemy

$$\mathfrak{T} = \frac{\sum m'm''\left(\frac{r}{l}\right)^2 U^2}{2\Sigma m},$$

t. j. wyrażenie summy sił żywych odkształcania się jednostki objętości elementu płynu. Znak Σm przedstawia tutaj massę odpowiednią jednostce objętości elementu, t. j. gęstosć płynu, mamy więc

$$\Sigma m = \rho;$$

a ponieważ każda z mass m', m'', . . . jest pewną częścią całkowitej massy Σm, można założyć

$$m' = n'\rho, \quad m'' = n''\rho, \ldots$$

rozumiejąc przez n', n'', . . . liczby dodatne mniejsze od jedno-

ści i zadość czyniące warunkowi

$$n' + n'' + \ldots = 1.$$

Wtedy znajdujemy dla jednostki odjętości

$$\mathfrak{T} = \frac{\rho}{2} \sum n'n'' \left(\frac{r}{l}\right)^2 U^2.$$

Nareszcie zastąpiwszy ilość U wartością jej (10) i wykonawszy wskazane działania, to ponieważ pochodne $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$, jako odnoszące się do środka ciężkości $M(x, y, z)$, posiadają jednakowe wartości we wszystkich wyrazach summy $\sum$, znajdziemy bez trudności

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{T} = {} & A\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + D\left[\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)^2 + 2\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}\right] \\ & + B\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + E\left[\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)^2 + 2\frac{dw}{dz}\frac{du}{dx}\right] \\ & + C\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + F\left[\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)^2 + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}\right] \\ & + G\left[\frac{du}{dx}\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\right] \\ & + H\left[\frac{dv}{dy}\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\right] \\ & + I\left[\frac{dw}{dz}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\right] \\ & + K\frac{du}{dx}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + L\frac{du}{dx}\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) \\ & + M\frac{dv}{dy}\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + N\frac{dv}{dy}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \\ & + P\frac{dw}{dz}\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + Q\frac{dw}{dz}\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \end{aligned} \right.$$

gdzie

$$
(14)\quad\left\{
\begin{array}{ll}
\frac{\rho}{2}\sum n'n''a^4\left(\frac{r}{l}\right)^2, & B=\frac{\rho}{2}\sum n'n''b^4\left(\frac{r}{l}\right)^2, \\
\multicolumn{2}{c}{C=\frac{\rho}{2}\sum n'n''c^4\left(\frac{r}{l}\right)^2,} \\
D=\frac{\rho}{2}\sum n'n''b^2c^2\left(\frac{r}{l}\right)^2, & E=\frac{\rho}{2}\sum n'n''c^2a^2\left(\frac{r}{l}\right)^2, \\
\multicolumn{2}{c}{F=\frac{\rho}{2}\sum n'n''a^2b^2\left(\frac{r}{l}\right)^2,} \\
G=\rho\sum n'n''a^2bc\left(\frac{r}{l}\right)^2, & H=\rho\sum n'n''b^2ca\left(\frac{r}{l}\right)^2, \\
\multicolumn{2}{c}{I=\rho\sum n'n''c^2ab\left(\frac{r}{l}\right)^2,} \\
K=\rho\sum n'n''a^3b\left(\frac{r}{l}\right)^2, & L=\rho\sum n'n''a^3c\left(\frac{r}{l}\right)^2, \\
M=\rho\sum n'n''b^3c\left(\frac{r}{l}\right)^2, & N=\rho\sum n'n''b^3a\left(\frac{r}{l}\right)^2, \\
P=\rho\sum n'n''c^3a\left(\frac{r}{l}\right)^2, & Q=\rho\sum n'n''c^3b\left(\frac{r}{l}\right)^2.
\end{array}\right.
$$

Druga strona równania (13) przedstawia oczywiście summę sił żywych odkształcania się jednostki objętości elementu płynu.

Współczynniki A, B, C,. . . , tak określonej summy, dane są przez drugie strony równań (14); każdy z nich jest summą podobnych sobie wyrazów zależnych sposobem całkowitym od ilości n', n'', a, b, c, $\frac{r}{l}$. Pozostają do obliczenia wartości tych współczynników.

68. Obliczenie współczynników wielomianu $\mathfrak{T}$.—Przedewszystkiem należy się zapewnić wiele wyrazów zawiera w sobie każda z summ (14). W tym celu załóżmy, że jednostka objęto-

tości elementu jest sztywną. Założeniu temu odpowiada warunek $\frac{dR}{dt}=0$, dający na mocy równania (12)

$$U=0,$$

albowiem wartość $\frac{r}{l}$ jest różną od zera. Przywracając znaczenie (10) ilości U i pamiętając, że równanie $U=0$ ma miejsce przy wszelkich wartościach a, b, c, znajdziemy oczywiście

$$\frac{du}{dx}=0, \quad \frac{dv}{dy}=0, \quad \frac{dw}{dz}=0,$$

$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=0, \quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}=0, \quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=0,$$

t. j. sześć warunków koniecznych i dostatecznych, ażeby jednostka objętości płynu była sztywną.

Przyjąwszy, że n jest liczbą punktów materyalnych jednostkę tę składających, wiadomo z mechaniki, iż liczba warunków koniecznych i dostatecznych ażeby układ był sztywnym wynosi $3n-6$; mamy zatem w przypadku naszym

$$3n-6=6,$$

co daje

$$n=4.$$

Tak więc znajdujemy bardzo ważne twierdzenie, *że jednostka objętości elementu płynu może być uważaną za układ czterech punktów materyalnych*. Na mocy tego twierdzenia liczba wyrazów każdej z summ (14) wynosi

$$\frac{4(4-1)}{2}=6.$$

Pozostaje do obliczenia każdy z tych wyrazów, lub co na jedno wychodzi każdy z elementów go składających. Zacznijmy od